

## Physikalisches Grundpraktikum

Praktikum für Mediziner		
M3 Energieerhaltungssatz an der geneigten Winkelschiene		
Name:	Versuchsgruppe:	Datum:
Mitarbeiter der Versuchsgruppe:		lfd. Versuchs-Nr:

### Aufgaben

#### Vorbereitungsaufgaben:

1. Wie lange müssen Sie „fasten“, d.h. dürfen Sie nur 8400kJ pro Tag zu sich nehmen anstatt Ihrer normalen Kost von 10500kJ, um 5,3 kg Fett abzubauen? (1g Fett besitzt einen Energieinhalt von 39 kJ). Als normal sei hier die Kost bezeichnet, bei der Sie Ihr Körpergewicht konstant halten.
2. Anstelle einer geringeren Energieaufnahme können Sie Ihr Gewicht auch durch erhöhte Energieabgabe reduzieren. Wie oft müssten Sie eine Masse von 50 kg einen halben Meter hoch wuchten?
3. Nach welcher Zeit erreicht ein Stein den Boden, der mit einer Geschwindigkeit von  $v_0 = 20 \frac{m}{s}$  unter einem Winkel von  $\varphi = 30^\circ$  nach oben (gegenüber der Waagerechten) von einem Turm von  $h_0 = 30m$  Höhe geworfen wird?
4. Wie lange benötigt eine homogene Kugel, um eine Winkelschiene mit einem Neigungswinkel von  $5^\circ$  die Strecke  $s = 1m$  hinunterzurollen, wenn sie zunächst in Ruhe ist?

#### Messaufgaben:

1. Messung der Rollzeit einer Kugel bei fünf verschiedenen Strecken, aber leichter Neigung ( $< 10^\circ$ ) der Winkelschiene
2. Bestimmung der Beschleunigung  $a$  aus der graphischen Darstellung  $s$  über  $t^2$
3. Messung der Rollzeit einer Kugel bei vier verschiedenen Neigungen, aber gleicher Strecke
4. Bestimmung der Erdbeschleunigungskonstanten  $g$  aus der graphischen Darstellung von  $a$  über  $\sin \alpha$
5. Vergleichen Sie die experimentelle Zeit für das Rollen der Kugel bei einem Neigungswinkel entlang einer Strecke von einem Meter mit dem dazugehörigen theoretischen Wert.
6. Mit welchem zufälligen Fehler ist die Messmethode behaftet? (Auswertung einer beliebigen Messreihe)

#### Geräteliste:

Winkelschiene, Metermaßstab, Unterlegklotz zum Schrägstellen der Winkelschiene, Stahlkugel und Stoppuhr

## Motivation

Wir wissen, dass die Energiezufuhr durch aerobe Oxidation von Nahrungsmitteln erfolgt. Menschen verbrennen in ihren Körpern die aufgenommenen Nahrungsmittel, hauptsächlich Kohlenhydrate, Fette und Proteine. Die organischen Nahrungsmittel werden durch den eingeatmeten Sauerstoff oxidiert, wobei Verbrennungsprodukte in Form von Kohlendioxyd, Wasser und anderen Substanzen entstehen. Fette und Kohlehydrate verbrennen vollständig zu Kohlendioxid und Wasser. Dagegen oxidieren die stickstoffhaltigen Zersetzungsprodukte des Eiweißes nicht vollständig bis zu den Endprodukten. Sie verlassen vielmehr den Körper in verschiedenen Zwischenstufen. Alle diese enthalten noch beträchtliche Energiemengen. Als Beispiel nennen wir Harnstoff und Harnsäure. Bei sämtlichen im Körper ablaufenden Stoffwechselfvorgängen kann nur die freie Enthalpie  $G$  genutzt werden.

Für isotherme Prozesse ist

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S,$$

$$\Delta H < 0 \quad \text{exotherme Prozesse}$$

$$\Delta H > 0 \quad \text{endotherme Prozesse}$$

Der Rest der von der energieliefernden Reaktion zur Verfügung gestellten Enthalpie  $T\Delta S$ , die gebundene Enthalpie, tritt aufgrund des 2. Hauptsatzes nur als Wärme auf.

Bildet man die Differenz zwischen der Summe der aufgenommenen in den Nahrungsmitteln enthaltenen Energiemengen und der in den Ausscheidungen des Körpers noch enthaltenen Energie, so ergibt sich die tatsächliche Energiemenge, die dem Körper aus der Nahrung noch zur Verfügung steht.

Die den Nährstoffen entnommene chemische Energie (Bindungsenergie von Molekülen der Nährstoffe) wird vom Körper genutzt

- zum Aufbau der notwendigen Proteine für die Neubildung und Reparatur von Zellen,
- zum Aufbau von Gerüstsubstanzen aus Polysacchariden,
- zur Erzeugung der Drüsensekrete,
- zur Aufrechterhaltung der Ionenkonzentrationsgradienten zwischen den Zellen und der extrazellulären Flüssigkeit ( $\text{ADP} \rightarrow \text{ATP}$ ),
- als Energiequelle für die Muskeltätigkeiten
- zur Übertragung von Nervenimpulsen.

Normalerweise entzieht der Körper der zugeführten Nahrung bis zu 95% der enthaltenen Energie. Der nicht genutzte Anteil wird gespeichert durch

- Fett im Fettgewebe und
- Glykogen in den Muskelzellen und in der Leber.

Da der Körper fortwährend Wärme durch Leitung, Strahlung, Ausatmung, Schweißabsonderung und dergleichen nach außen abgibt, muss ständig Wärme erzeugt werden, um seine Temperatur konstant zu erhalten. Bei großer Kälte muss mehr Energie bereit gestellt werden. Ebenso ist bei großer Arbeitsleistung eine erhöhte Nahrungsmittelaufnahme notwendig.

Ein Maß für den Energieumsatz des Körpers ist der *Grundumsatz*.

Unter dem Begriff *Grundumsatz* wird in der Physiologie der morgens beim ruhigen Liegen bei Indifferenztemperatur und normaler Körpertemperatur gemessene Energieumsatz des Körpers bezeichnet. Er enthält neben den Tätigkeitsumsätzen der immer in Aktivität befindlichen Organe wie Gehirn, Herz, Atemmuskulatur, Leber und Nieren nur die Bereitschaftsumsätze der übrigen Zellen. Der Grundumsatz beträgt beim Gesunden

$$dE / dt = 60 \text{ bis } 100 \text{ W}$$

je nach Körpermasse, Alter und Geschlecht.

Anstelle des beschriebenen sehr komplexen Energietransfers von der chemischen Energie in mechanische Arbeit, elektrische Energie, potentielle Energie, Strukturbildung und Wärme soll im vorliegenden Versuch die Umwandlung potentieller Energie in Translations- und Rotationsenergie sowie Wärme verfolgt werden.

## 1. Physikalischen Grundlagen:

### 1.1. Kinematik

Man betrachte die Bewegung eines Massenpunktes und beschreibe seinen Ort zur Zeit  $t$  durch die Funktion  $\vec{r}(t)$ . Ist dieser Körper nicht in Ruhe, so legt er in dem Zeitintervall  $\Delta t = t_2 - t_1$  den Weg  $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$  zurück. Nun kann man seine **mittlere Geschwindigkeit** in diesem Zeitintervall berechnen:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} .$$

Bildet man den Grenzwert  $t_2 \rightarrow t_1$ , so erhält man die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t_1$ :

$$\vec{v}(t_1) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Somit kann man die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  berechnen, indem man  $\vec{r}(t)$  nach der Zeit ableitet. Ebenso wird auch die Beschleunigung  $\vec{a}(t)$  definiert. Sie ist die Änderung der Geschwindigkeit  $\Delta \vec{v}$ , dividiert durch die dazu benötigte Zeit:

$$\vec{a}(t_1) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

### 1.2. Dynamik

#### 1. Newtonsches Axiom (Trägheitsprinzip)

*Wenn keine Kraft auf ihn einwirkt, befindet sich ein Körper im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung.*

#### 2. Newtonsches Axiom (Aktionsprinzip)

*Um einen Körper zu veranlassen, seinen Bewegungszustand zu ändern, muss eine Kraft  $\vec{F}$  wirken.*

Wenn man sich auf Gegenstände beschränkt, die ihre Masse nicht zeitlich ändern, so wird diese Erfahrungstatsache mit der Bewegungsgleichung

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

erfasst. Hierbei ist  $\vec{F}$  die Kraft,  $m$  die Masse und  $\vec{a}$  die Beschleunigung. Die Einheit der Kraft ist ein Newton:  $1\text{N} = 1\text{ kg m/s}^2$ . Auf der Erdoberfläche bewirkt die Gravitationskraft eine Beschleunigung von  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

### 3. Newtonsches Axiom (Reaktionsprinzip)

*Jede Kraft bewirkt eine gleich große Gegenkraft: actio = reactio*

$$F_{1,2} = -F_{2,1}$$

Eine einwirkende Kraft bewirkt eine Beschleunigung  $\vec{a}(t)$ , aus der durch Integration auf die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  geschlossen werden kann:

$$\int_0^{t_1} a(t) dt = v(t_1) - v_0 \quad ,$$

wobei  $v(t=0) = v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit ist. Somit ist:

$$v(t_1) = \int_0^{t_1} a(t) dt + v_0$$

Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ( $a(t) = \text{konst.}$ ) erhält man hieraus:

$$v(t) = a \cdot t + v_0$$

Durch nochmalige Integration ergibt sich das Weg-Zeit-Gesetz:

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

wobei  $s_0$  den Ort des Massenpunktes zum Zeitpunkt  $t_0$  angibt.

#### 1.3. Rotation

Die Drehbewegung eines starren Körpers um eine Achse ist vollständig beschrieben, falls man den **Drehwinkel**- $\varphi(t)$  zu jedem Zeitpunkt kennt. Somit kann man die **Winkelgeschwindigkeit**  $\omega$  analog zur Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  definieren, indem man den Ort  $\vec{r}(t)$  durch den Drehwinkel  $\varphi(t)$  ersetzt:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$$

Konsequenterweise wird die **Winkelbeschleunigung** definiert als die zeitliche Ableitung der Winkelgeschwindigkeit:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt}$$

Man betrachte nun einen punktförmigen Körper der Masse  $m$ , der mit konstanter Bahngeschwindigkeit  $v$  eine Kreisbewegung mit dem Radius  $r$  vollzieht, so ist seine kinetische Energie gegeben durch:

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Die Geschwindigkeit  $v$  steht mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in der Relation

$$v = \omega \cdot r$$

Somit ergibt sich:

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \theta \cdot \omega^2$$

Dabei ist  $\theta = m \cdot r^2$  das Trägheitsmoment eines punktförmigen Körpers, der sich auf einem Kreis mit dem Radius  $r$  bewegt. Das Trägheitsmoment eines beliebigen Körpers ist das Integral über alle infinitesimal kleinen Massenelemente  $dm$  im Abstand  $r$  von der Rotationsachse:

$$\theta = \int r^2 \cdot dm = \int_{\text{Volumen}} r^2 \cdot \rho dV$$

Dabei wurde für einen homogenen Körper der Dichte  $\rho$  gesetzt:  $dm = \rho dV$ . Für eine homogene Kugel mit der Masse  $m$  und Radius  $R$  erhält man zum Beispiel bei Rotation um eine Achse, die durch den Kugelmittelpunkt (Schwerpunkt) geht:

$$\theta_{Kugel} = \frac{2}{5} m \cdot R^2$$

#### 1.4. Energieerhaltungssatz

Einer der wichtigsten Sätze der Physik ist der Energieerhaltungssatz. Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden, jedoch können verschiedene Energieformen ineinander umgewandelt werden. Daher lautet der Energieerhaltungssatz:

***In einem abgeschlossenen System ist die Summe aller Energien konstant.***

Für den vorliegenden Versuch sind folgende Energieformen relevant:

1. Die *kinetische* Energie  $W_{kin}$ . Sie wird unterteilt in:

(a) Translationsenergie

$$W_{trans} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

(b) Rotationsenergie

$$W_{rot} = \frac{1}{2} \cdot \theta \cdot \omega^2$$

2. Die *potentielle* Energie  $W_{pot}$  im homogenen Schwerfeld der Erde:

(a) Potentielle Energie

$$W_{pot} = m \cdot g \cdot \Delta h$$

Dabei ist  $\Delta h$  die Höhendifferenz zwischen End- und Anfangspunkt der Bewegung. Der Energieerhaltungssatz lautet somit:

$$W_{ges} = W_{pot} + W_{trans} + W_{rot} = const.$$

Zu beachten ist, dass der Energieerhaltungssatz der Mechanik häufig durch das Auftreten von Reibung verletzt wird, d.h. der Energieerhaltungssatz muss um einen Beitrag der Reibung (u. a. Haft-, Gleit- und Rollreibung) erweitert werden.

## 1.5. Die schiefe Ebene

In der Abb.1 ist das Kräfteverhältnis für einen Körper auf der schiefen Ebene gezeichnet. Auf ihn wirkt die Schwerkraft  $\vec{F}_G$ , die sich in die Hangabtriebskraft  $\vec{F}_H$  und die Normalkraft  $\vec{F}_N$  zerlegen lässt. Die Normalkraft  $\vec{F}_N$  steht senkrecht zur Oberfläche und trägt dementsprechend nicht zur Bewegung bei (Kompensation durch Zwangskraft der Schiene). Hierfür ist nur die Hangabtriebskraft  $\vec{F}_H$  verantwortlich:

$$|\vec{F}_H| = |\vec{F}_G| \sin \alpha = mg \sin \alpha$$

Nun kann man die Beschleunigung ausrechnen:

$$a = |\vec{a}| = \frac{\vec{F}_H}{m} = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha$$

Die zurückgelegte Strecke  $s$  hängt mit der durchlaufenen Höhendifferenz  $h$  folgendermaßen zusammen:

$$h = s \cdot \sin \alpha$$

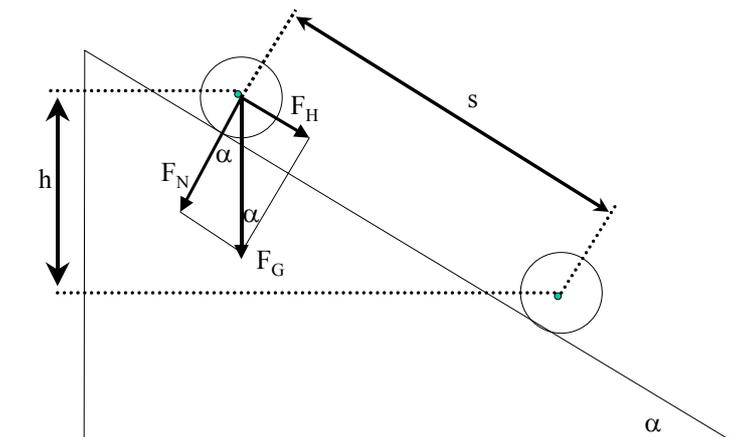


Abbildung 1: Kräfteparallelogramm für die schiefe Ebene: Auf den Körper wirkt die Schwerkraft  $\vec{F}_G$ , die sich in die Hangabtriebskraft  $\vec{F}_H$  und die Normalkraft  $\vec{F}_N$  zerlegen lässt.

### 1.6. Bewegung einer rollenden Kugel in einer Winkelschiene (Ableitung über den Energieerhaltungssatz)

Eine auf einer schiefen Ebene herabrollende Kugel vollzieht sowohl eine Rotationsbewegung (die Kugel rollt, gleitet nicht) als auch eine Translationsbewegung.

Durch den Abrollvorgang wird die potentielle Energie in Translations- und Rotationsenergie umgesetzt:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta_{Kugel}\omega^2 \quad (*)$$

Daraus erkennt man, dass eine rollende Kugel langsamer als eine reibungsfrei gleitende Kugel ist, weil ein Teil der Energie in die Rotationsenergie geht und dann bei der Translation fehlt. Das heißt auch, dass die lineare Beschleunigung beim Rollen kleiner ist als beim Gleiten.

Nun ist es sinnvoll, eine Beziehung zwischen  $L$  und  $v$  abzuleiten. Dabei ist zu beachten, dass im Praktikumsversuch die Kugel nicht auf einer flachen schiefen Ebene, sondern in einer  $90^\circ$ -Winkelschiene rollt. Wie aus Abb. 2 ersichtlich, ist daher der Abrollradius  $r$  ungleich dem Kugelradius  $R$ . Nach dem Satz von Pythagoras gilt für die  $90^\circ$ -Schiene:  $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$

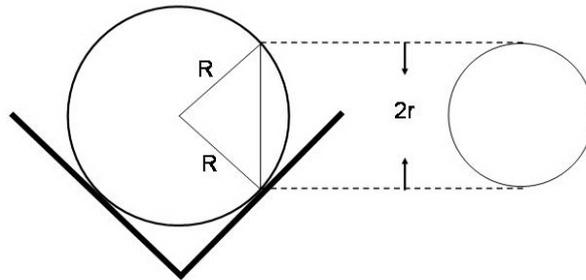


Abbildung 2: Kugel in einer  $90^\circ$ -Winkelschiene

Für die Bahngeschwindigkeit, d.h. der Geschwindigkeit auf dem Kreis mit dem Radius  $r$ , erhält man

$$v = \omega \cdot r = \omega \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} .$$

Für den Energieerhaltungssatz (\*) ergibt sich:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}m \cdot R^2\right)\left(v \cdot \frac{\sqrt{2}}{R}\right)^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{5}m\right)v^2 \quad (**)$$

Man erkennt, dass durch die Reduzierung des Abrollradius von  $R$  auf  $\frac{R}{\sqrt{2}}$  sich die Rotationsenergie um den Faktor 2 erhöht und somit bei einer Rollbewegung auf einer Winkelschiene die Translationsenergie nur  $5/9$  der Gleitbewegung beträgt.

Für die Beschleunigung  $a = v / t$  bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung erhält man mit dem Weg-Zeit-Gesetz und  $v_0 = 0$  sowie  $s_0 = 0$ :

$$a = \frac{v^2}{2s} .$$

Ersetzt man  $v^2$  durch (\*\*), so findet man für die Beschleunigung einer Kugel auf einer  $90^\circ$  - Winkelschiene mit dem Anstellwinkel  $\alpha$

$$a = \frac{5}{9} \frac{gh}{s} = \frac{5}{9} \frac{gs \sin \alpha}{s} = \frac{5}{9} g \sin \alpha$$

Die Beschleunigung einer rollenden Kugel auf einer Winkelschiene ist also um den Faktor  $9/5$  kleiner als die einer gleitenden Kugel (siehe schiefe Ebene). Da es sich auch hier um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung handelt, gilt für die zurückgelegte Strecke in Abhängigkeit von der Zeit:

$$s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{5}{18} g(\sin \alpha)t^2$$

## 2. Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

1. Bauen Sie die Winkelschiene wie in Abb. 3 gezeigt auf. Dabei sollte der Neigungswinkel  $\alpha$  zwischen  $1^\circ$  und  $6^\circ$  liegen. Bestimmen Sie den Sinus des Winkels und daraus den Winkel selbst über die Höhe des angehobenen Fußes der Schiene über der (waagerechten!?) Unterlage und den Abstand der Füße entlang der Winkelschiene.

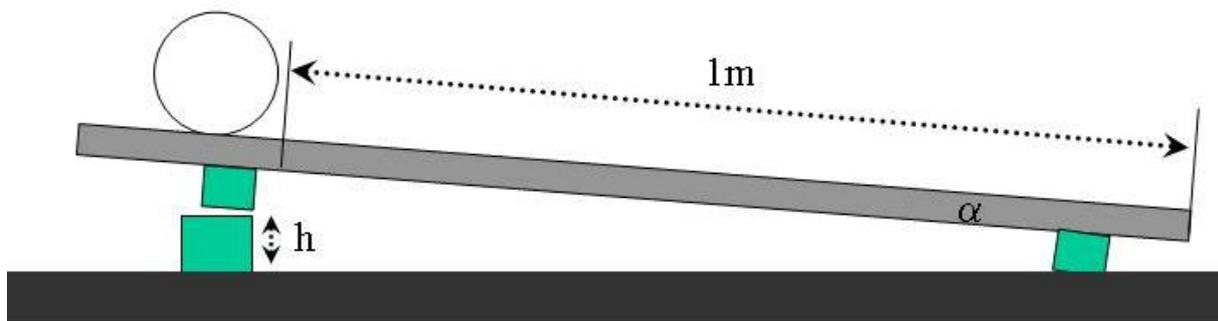


Abb. 3: Aufbau der Winkelschiene für die Messung der Kugelrollzeiten.

Variieren Sie den Weg, den die Stahlkugel zu rollen hat, und messen Sie für fünf unterschiedliche Strecken  $s_i$  die Laufzeit jeweils zehnmal. (Wie müssen Sie bei der Bestimmung der Laufstrecke den Kugeldurchmesser berücksichtigen?)

Bilden Sie aus den jeweils 10 Zeiten die Mittelwerte  $\bar{t}_i$  und Standardabweichungen  $\Delta t_i$  und tragen Sie  $\bar{t}_i$  gegen die durchlaufenen Strecken  $s_i$  auf. Bei Bewegungen mit konstanter Beschleunigung nimmt der Weg quadratisch mit der Zeit zu, so dass sich in einer s-t-Darstellung eine Parabel ergibt. Trägt man dagegen  $s$  gegen  $t^2$  auf, ergibt sich eine Gerade. (Warum sollten Parabel und Gerade durch den Nullpunkt gehen?) Bestimmen Sie graphisch die Steigung  $\frac{\Delta s}{\Delta t^2}$  der Ausgleichsgeraden an die Messpunkte. Berechnen Sie aus der Steigung die Beschleunigung  $a$ !

2: Führen Sie die Messung wie im vorhergehenden Versuchsteil für vier verschiedene Neigungen  $\alpha_i$  bei einer festen Streckenlänge  $s$  der schiefen Ebene durch. (Dabei können Sie eine der früheren Messserien verwenden. Führen Sie drei weitere bei der gleichen Strecke durch.) Die

unterschiedlichen Höhen können Sie unter Ausnutzung der unterschiedlichen Kantenlängen des Unterlegklotzes leicht realisieren. Zusätzlich können Sie die Halterung der Platzkarte verwenden. Messen Sie jeweils zehnmal die Laufzeit. Beachten Sie, dass die Kugel rollt und nicht gleitet. (Die Winkel dürfen nicht zu groß sein!)

Bilden Sie wie oben die Mittelwerte  $\bar{t}_i$  und Standardabweichungen  $\Delta t_i$  und berechnen Sie die entsprechenden Beschleunigungen  $a_i$  sowie die entsprechenden Unsicherheiten  $\Delta a_i$  entsprechend der Gaußschen Fehlerfortpflanzung! Tragen Sie die Werte der Beschleunigung  $a_i$  gegen  $\sin \alpha_i$  in einem Diagramm auf. Berechnen Sie aus der Steigung der Geraden die Erdbeschleunigung  $g$  ! Vergleichen Sie den gemessenen Wert für  $g$  mit dem Literaturwert! Diskutieren Sie das Ergebnis!