

# Physikalisches Grundpraktikum

|                                       |                 |                   |
|---------------------------------------|-----------------|-------------------|
| Praktikum für Mediziner               |                 |                   |
| M14 Viskose Strömung durch Kapillaren |                 |                   |
| Name:                                 | Versuchsgruppe: | Datum:            |
| Mitarbeiter der Versuchsgruppe:       |                 | lfd. Versuchs-Nr: |

## Vorbereitungsaufgaben

1. Diskutieren Sie die Analogie zwischen dem Ohmschen und dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz. Welche Größen entsprechen der Spannung, der Stromstärke, der Ladung, dem spezifischen Widerstand und dem Widerstand selbst?
2. Durch ein 0,5 m langes Rohr mit 8mm Durchmesser sollen Flüssigkeiten unterschiedlicher Viskosität laminar fließen ( $\eta_{\text{Glyzerin}} = 0,83 \text{ Pa s}$ ,  $\eta_{\text{Blut}} = 0,0045 \text{ Pa s}$ ). Wie groß ist die Volumenstromstärke, falls die Druckdifferenz zwischen den Rohrenden 100 Torr beträgt?  
Wie stark verringert sich die Stromstärke, wenn der Rohrdurchmesser halbiert wird?
3. Wie groß ist das Verhältnis der Sedimentationsgeschwindigkeiten von kugelförmigen Partikeln (z.B. biologischen Makromolekülen) bei Sedimentation im Schwerfeld der Erde bzw. in der Ultrazentrifuge? (Die Zentrifugalbeschleunigung sei  $10^6 \text{ m/s}^2$ .)
4. Kommt es in der Aorta (ca. 2 cm Durchmesser) zu turbulenter Strömung, wenn die Maximalgeschwindigkeit des Blutes bei der Systole ca. 0,5 m/s beträgt? (Dichte  $\rho_{\text{Blut}} \approx \rho_{\text{Wasser}}$ , Reynolds-Zahl  $R \approx 1000$ )

## Messaufgaben

1. Messung der Volumenstromstärke bei drei Kapillaren unterschiedlicher Länge (bei gleichem Durchmesser und Druckunterschied).
2. Messung der Volumenstromstärke bei drei Kapillaren unterschiedlichen Durchmessers (bei gleicher Länge und gleichem Druckunterschied).
3. Messung der Volumenstromstärke bei drei unterschiedlichen Druckdifferenzen (Gefäßhöhen) mit Kapillaren gleichen Durchmessers und gleicher Länge.
4. Messung der Volumenstromstärke bei unterschiedlichen Temperaturen.

**Geräteliste:** 2 Messbecher mit Haltevorrichtung, Schläuche unterschiedlicher Durchmesser und Längen, Spritze mit Aufsatz, Wasserkocher, Thermoskanne, Stoppuhr und Thermometer

## Motivation

Die Stärke des Volumenstroms einer Flüssigkeit durch ein Leitungssystem ist in erheblichem Maße von den Dimensionen der Leitungsgefäße, aber auch von der Viskosität der Flüssigkeit abhängig. Die entsprechenden Zusammenhänge sind im Hagen-Poiseuille Gesetz erfasst. Für das Blut und den Blutkreislauf ist allerdings zu bedenken, dass einerseits das Blut keine Newtonsche Flüssigkeit ist und andererseits die Blutgefäße nicht als starre Rohre aufgefasst werden können. Das Blut besitzt keine konstante Viskosität, da es keine homogene Flüssigkeit ist, sondern korpuskuläre Anteile, wie z.B. die roten Blutkörperchen, enthält. Der relative Anteil der Korpuskeln am Gesamtblut wird durch den Hämatokrit erfasst. Die scheinbare Viskosität des Blutes ist vom Hämatokrit, aber auch von der Strömungsgeschwindigkeit des Blutes abhängig: die Viskosität des Blutes nimmt mit zunehmendem Hämatokrit zu, aber mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit ab. Eine Erhöhung des Hämatokrits z.B. durch Wassermangel hat erhebliche Konsequenzen für die Mikrozirkulation, da in den Kapillaren eine sehr geringe Strömungsgeschwindigkeit herrscht und damit die Gefahr des Erliegens der Strömung besteht.

## Physikalischen Grundlagen

### Viskosität

Die innere Reibung (dynamische Viskosität) ist eine der physikalischen Größen, durch die strömende Flüssigkeiten charakterisiert sind. Bei laminarer Strömung bewegen sich die Flüssigkeitsteilchen in nebeneinander laufenden Stromfäden. Die Strömungsgeschwindigkeit ist aber im Allgemeinen unterschiedlich, so dass zwischen zwei im Abstand  $\Delta x$  nebeneinander strömenden Lamellen ein Geschwindigkeitsunterschied  $\Delta v$  besteht (vgl. Abb. 1).

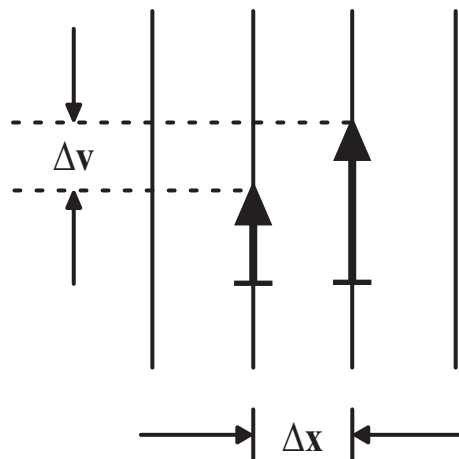


Abb. 1 Zur Definition der Viskosität

Durch die innere Reibung erzeugen die betrachteten Schichten eine Schubspannung  $\tau = F/A$  ( $F =$  Kraft,  $A =$  Fläche), so dass die schnellere Schicht gebremst wird.  $\tau$  ist bei normalen Flüssigkeiten dem Geschwindigkeitsgefälle  $\Delta v / \Delta x$  proportional:

$$\tau = \eta \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} . \quad \text{Glg. 1}$$

Der Faktor  $\eta$  heißt dynamische Viskosität und hat die Einheit

$$[\eta] = \frac{N \cdot s}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s} = Pa \cdot s, \quad \text{Glg. 2}$$

wobei 1 Pascal = 1 Pa = 1 N/m<sup>2</sup> die SI-Einheit für den Druck darstellt. (Eine ältere Einheit für die Viskosität ist 1 Poise = 0,1 Ns/m<sup>2</sup>.)

Strömungen, die im Wesentlichen durch die Viskosität bestimmt werden, nennt man laminar. Die Viskosität von Flüssigkeiten nimmt mit steigender Temperatur meist stark ab. Für viele Flüssigkeiten gilt in guter Näherung das

$$\text{Arrhenius-Gesetz:} \quad \eta(T) = A \cdot \exp\left(\frac{E_A}{k_B T}\right). \quad \text{Glg. 3}$$

Hierbei ist  $A$  eine Konstante,  $E_A$  eine Aktivierungsenergie,  $k_B$  die Boltzmann-Konstante ( $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23}$  J/K) und  $T$  die absolute Temperatur (in Kelvin).

Die Scherung einer Flüssigkeit ist nur möglich, falls Molekülschichten übereinander hinweggleiten. Flüssigkeitsmoleküle sind zwar nicht wie im Festkörper an Ruhelagen fixiert, aber die Verzahnung benachbarter Schichten bedingt Potentialwälle, die um so leichter zu überspringen sind, je höher die Temperatur ist. Demzufolge bedeutet  $E_A$  im Wesentlichen die Aktivierungsenergie des Platzwechsels.

### Das Gesetz von Hagen-Poiseuille

Eine Kapillare vom Radius  $r$  und der Länge  $l$  werde von einer Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  und der dynamischen Viskosität  $\eta$  durchflossen. Zwischen den Enden der Kapillare herrsche die Druckdifferenz  $\Delta p = p_2 - p_1$ . In der Zeit  $\Delta t$  fließe durch die Kapillare das Flüssigkeitsvolumen  $\Delta V$ . Als Volumenstromstärke  $J$  bezeichnet man das Flüssigkeitsvolumen pro Zeit:  $J = \Delta V / \Delta t$ . Das Hagen-Poiseuillesche Gesetz gibt die Volumenstromstärke in Abhängigkeit der Druckdifferenz, der Viskosität und der Geometrie des Kapillarrohres an:

$$J = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot (p_1 - p_2)}{8 \cdot \eta \cdot l} = \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta \cdot l} \cdot \Delta p \quad \text{Glg. 4}$$

Dabei hat der Faktor  $\frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta \cdot l}$  die Bedeutung des Strömungsleitwertes, während der Kehrwert

$\frac{8 \cdot \eta \cdot l}{\pi \cdot r^4}$  die Bedeutung eines Strömungswiderstandes hat, analog zum Ohmschen Gesetz.

Zur Messung der dynamischen Viskosität  $\eta$  dient die in Abb. 2 dargestellte Anordnung. Sie ermöglicht sowohl die Messung der Volumenstromstärke  $J$  als auch der Druckdifferenz  $\Delta p$ . Steht das Kapillarrohr senkrecht, so wird die Druckdifferenz durch den Schweredruck der Flüssigkeit

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot h \quad \text{Glg. 5}$$

erzeugt. Aus dem Einsetzen von Glg. 5 in das Hagen-Poiseuillesche Gesetz (Glg. 4) folgt für die Viskosität:

$$\eta = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot \rho \cdot g \cdot h}{8 \cdot l \cdot J} = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot \Delta t}{8 \cdot l \cdot \Delta V} \quad \text{Glg. 6}$$

## Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

**Zu 1)** Messung der Volumenstromstärke  $J$  bei drei Kapillaren **unterschiedlicher Länge** (bei gleichem Durchmesser  $d$  und gleichem Druckunterschied  $\Delta p$ ).

Für diese Messungen verwenden Sie Kapillaren mit dem Durchmesser  $d_2 = 2$  mm. Hiervon sollten Sie drei Exemplare der Längen  $l \sim 0.6$  m,  $1$  m und  $2$  m vorfinden. Die genauen Werte variieren! Messen Sie nach! Bauen Sie die Versuchsanordnung aus Abb. 2 auf. Füllen Sie das Vorratsgefäß (oberes Gefäß) mit Wasser und bestimmen Sie die Anfangstemperatur  $T_1$  des Wassers. Die Kapillare  $K$  verbindet das Vorratsgefäß mit dem Auffanggefäß. Sie taucht im Vorratsgefäß bis zum Boden und im Auffanggefäß bis unter den Wasserspiegel ein. Beachten Sie, dass beide Enden der Kapillare stets in der Flüssigkeit münden, da sich sonst Tropfen bilden, deren Oberflächenspannung eine Verminderung der Druckdifferenz bewirken und dieses das Messergebnis erheblich verfälschen würde! Bestimmen Sie die anfängliche Höhendifferenz  $h_1$  der Flüssigkeitsspiegel.

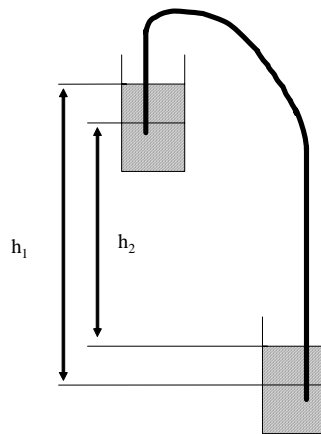


Abb. 2: Anordnung zur Messung der dynamischen Viskosität  $\eta$

Lassen Sie nun das Wasser durch die Kapillare fließen (dazu kurz etwas Wasser mit der Spritze ansaugen) und messen Sie die Zeit  $\Delta t$  für den Durchfluss einer bestimmten Wassermenge (wählen Sie mindestens 100 ml). Bestimmen Sie dann die verbliebene Höhendifferenz  $h_2$  und daraus die mittlere Höhendifferenz  $h = (h_1 + h_2)/2$ . Messen Sie außerdem die Endtemperatur  $T_2$  des Wassers im Vorratsgefäß. Die mittlere Wassertemperatur ergibt sich als  $T = (T_1 + T_2)/2$ . Die Viskosität berechnet sich dann aus Glg. 6 mit den Größen Länge  $l$  (in m),  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>,  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

Die **Temperaturmessung** erfolgt mit einem Flüssigkeitsthermometer.

Erstellen Sie ein Diagramm Volumenstromstärke  $J$  über Länge  $l$

**Zu 2)** Messung der Volumenstromstärke  $J$  bei drei Kapillaren **unterschiedlichen Durchmessers** (bei gleicher Länge und gleicher Druckdifferenz  $\Delta p$ ). Wiederholen Sie obige Messung mit zwei weiteren Kapillaren ( $d_3 = 3$  mm und  $d_1 = 1$  mm) der Länge  $l \sim 1$  m. (Messen Sie jeweils den genauen Wert der Länge!)

Erstellen Sie ein Diagramm Volumenstromstärke  $J$  über  $d^4$  (4. Potenz).

**Zu 3)** Messung der Volumenstromstärke  $J$  bei **drei unterschiedlichen Drücken** (Höhendifferenzen). Verwenden Sie hierzu die Kapillare mit dem Durchmesser  $d_2 = 2$  mm und ca.  $l = 1$  m Länge. Bestimmen Sie dazu zusätzlich zu der Messung unter 1. den Volumenstrom  $J$  für zwei weitere Höhen  $h$ .

Erstellen Sie ein Diagramm Volumenstromstärke  $J$  über Höhendifferenz  $h$ .

**Zu 4) Messung der Volumenstromstärke J bei unterschiedlichen Temperaturen.**

Diesen Versuchsablauf haben Sie zunächst bei Raumtemperatur für die zur Verfügung stehenden Kapillaren  $K_1$  ( $d_1 = 1$  mm),  $K_2$  ( $d_2 = 2$  mm) und  $K_3$  ( $d_3 = 3$  mm) durchgeführt (2.). Nun soll die Messung der Viskosität mit der Kapillare  $K_3$  noch bei mindestens zwei weiteren, deutlich unterschiedlichen Temperaturen im Bereich zwischen  $0^\circ$  und  $60^\circ$  C (z.B.  $5^\circ$  und  $45^\circ$  C) durchgeführt werden. Überprüfen Sie anhand der gemessenen Viskositäten bei den drei verschiedenen Temperaturen die Gültigkeit des Arrhenius-Gesetzes (Glg. 3). Tragen Sie hierzu in einem Diagramm  $\ln(\eta)$  gegen  $1/T$  auf. Überlegen Sie, wieso dies sinnvoll ist. Ermitteln Sie aus der Steigung der zu erwartenden Geraden die Aktivierungsenergie  $E_A$  (Boltzmann-Konstante  $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23}$  J/K). **Beachten Sie, dass beim Arrhenius-Plot für T die absolute Temperatur in Kelvin einzusetzen ist!**