

### **2.4 Mechanik ruhender Flüssigkeiten und Gase (Fluide)**

**2.4.1 Druck:** Schweredruck und Stempeldruck, auch Gesamtdruck in einem flüssigkeitsgefüllten Behälter

**2.4.2 Druckmessung:** Druckmessung mittels üblicher Manometer; Darstellung einfacher Fälle, speziell auch am U-Rohr-Manometer

**2.4.3 Hydraulische Anordnungen:** Druckerzeugung mittels Kolben; Zusammenhänge für Druck, Kraft, Weg und Energie (Arbeit), z.B. bei der hydraulischen Presse

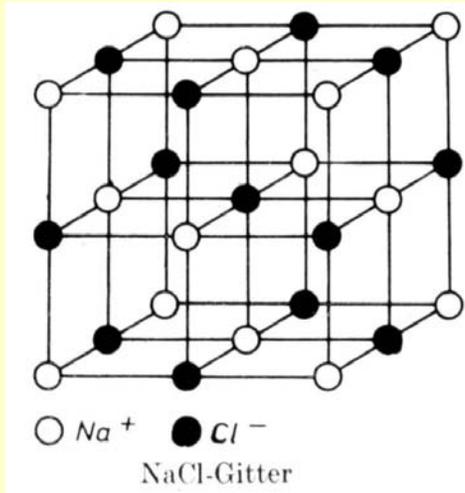
**2.4.4 Auftrieb:** Auftrieb in Flüssigkeiten und Gasen, archimedisches Prinzip, Schwimmbedingung, Schweben

**2.4.5 Dichte:** Messung mittels Aräometer und Mohr'scher Waage, Pyknometer-Methode; Messung an Festkörpern mittels Schwebemethode

**2.4.6 Partialdruck:** Gesamtdruck und Partialdruck bei Gasgemischen

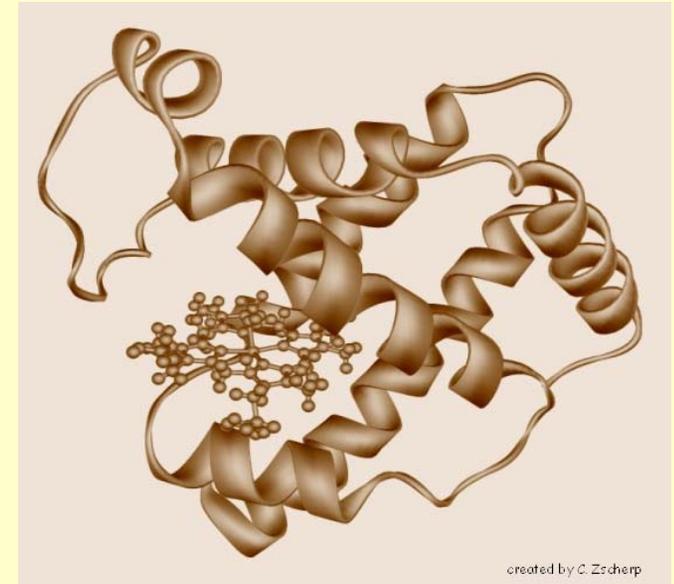
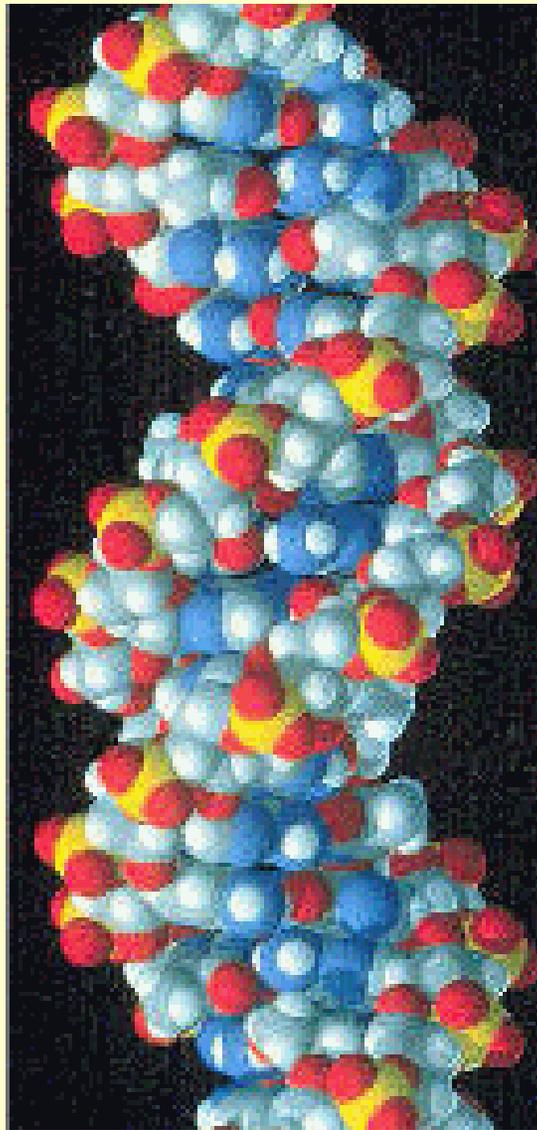
- Hookesches Gesetz, Biegung
- Hydrostatisches Paradoxon, verbundene Gefäße, Unabhängigkeit des Drucks von der Richtung  
Pascalsche Waage
- Oberflächenspannung, Kapillarität
- Druck: hydraulische Presse
- Auftrieb (Elfenbeinkugel im Wasser, Styroporkugel im Vakuum...)
- Hagen-Poiseuille
- Hydrodynamik, Hydrodynamisches Paradoxon  
Kontinuität, Bernoulli (Ball im Luftstrom, Rohr mit Verengung, Scheibe an Kohlendioxidflasche)

# Mechanische Eigenschaften von Stoffen



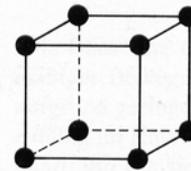
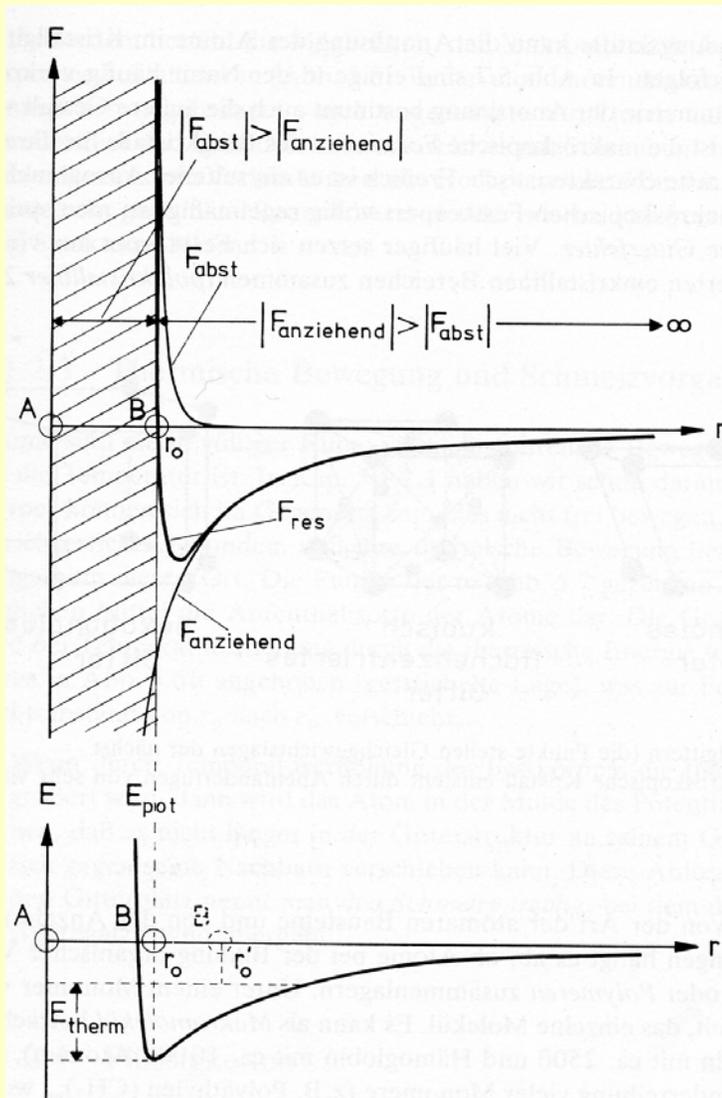
Einfacher,  
periodischer Aufbau  
des NaCl-Kristalls

Doppelhelix-  
struktur der  
DNS

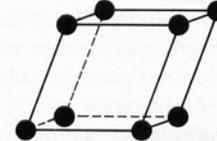


Myoglobin

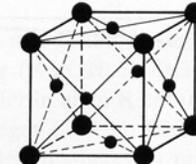
# Festkörper



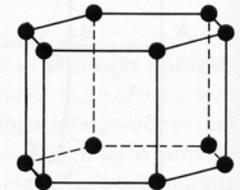
einfach  
kubisches  
Gitter



trigonales  
Gitter



kubisch  
flächenzentriertes  
Gitter



hexagonales  
Gitter

Geordnete Strukturen von Festkörpern  
(ungeordnet = „amorph“)

Erklärung der Ausdehnung bei  
Temperaturzunahme

# Aggregatzustände

	Festkörper	Flüssigkeit	Gas	Plasma
Struktur	Struktur	Nahordnung	keine	keine
Formbeständigkeit	ja	schwach	keine	keine
Energie	$E_{th} \ll E_{\text{Bindung}}$	$E_{th} \sim E_{\text{Bindung}}$	$E_{th} > E_{\text{Bindung}}$	$E_{th} \gg E_{\text{bindung}}$



T=300 K

T=100.000 K

**Man spricht auch von verschiedenen Zustandsformen oder „Phasen“ der Materie. Dies ist aber ein allgemeinerer Begriff.**

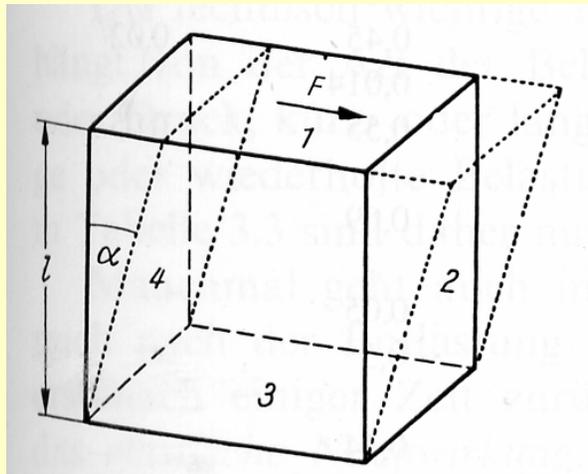
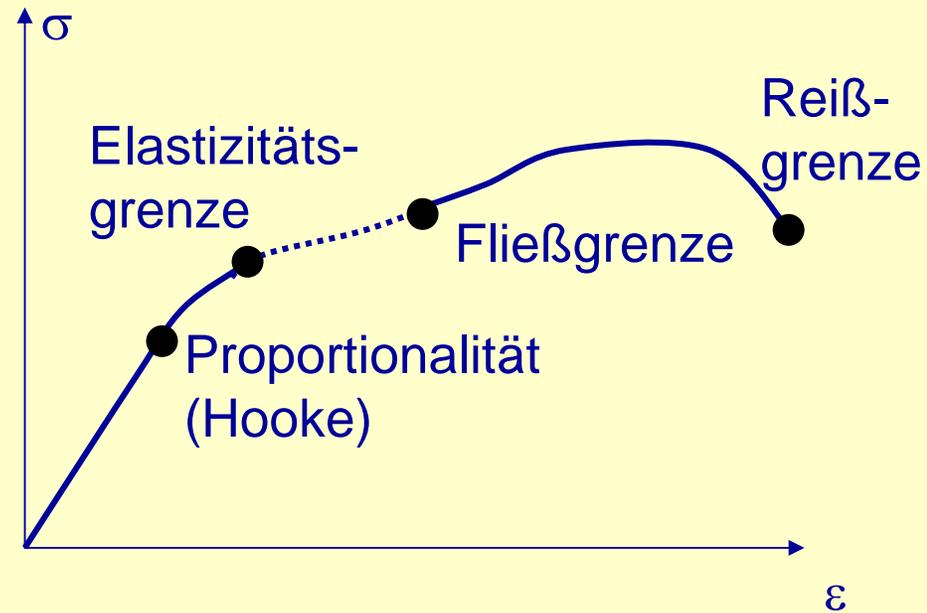
# Dehnung und Torsion

## Hookesches Gesetz:

Die Spannung  $\sigma = F/A$  ist der Dehnung  $\varepsilon = \Delta/l$  proportional

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \varepsilon = \frac{1}{E} \sigma$$

$E$  ist der Elastizitätsmodul.



## Hookesches Gesetz:

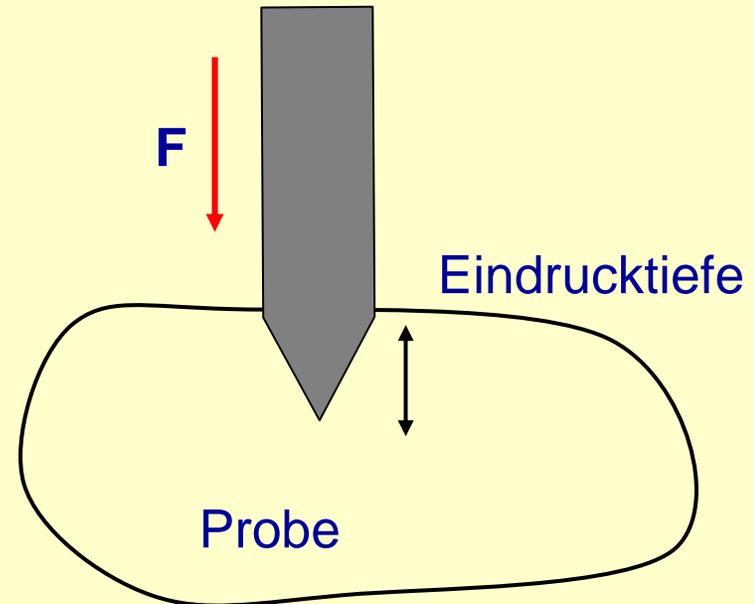
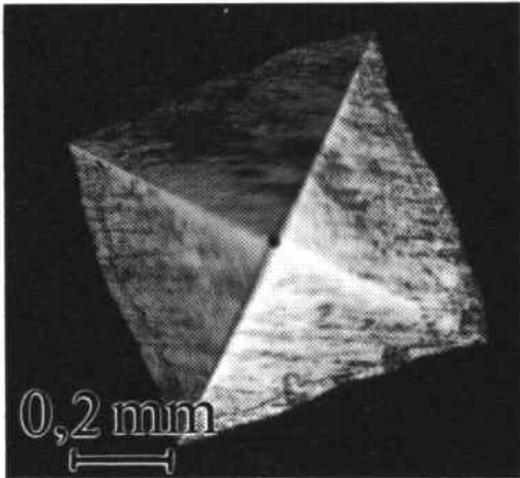
Die Schubspannung  $\sigma = F/l^2$  ist proportional zum Winkel  $\alpha$

$$\tau = G \cdot \alpha$$

$G$  ist der Schub-/Scherungs-/Torsionsmodul.

# Härte

Härte: Widerstand eines Körpers gegen Eindringen eines Probekörpers



## Mikrohärteprüfung nach Vickers:

Diamantpyramide mit quadratischer Grundfläche

Man misst unter dem Mikroskop die Länge der Diagonale

$$HV = 0.1891 \frac{F}{d^2} \text{ (in N/mm}^2\text{)}$$

### **2.6 Grenzflächeneffekte**

**2.6.1 Grenzflächenspannung:** Oberflächenspannung, Darstellung als Flächendichte der Grenzflächenenergie und als Kraft pro Länge an einer Berandung; Temperaturabhängigkeit (qualitativ); Wirkung von Tensiden

**2.6.2 Zwischenmolekulare Kräfte:** Zusammenhang mit Grenzflächeneffekten (qualitativ), Kohäsion, Adhäsion, Benetzung, Spreitung, Adsorption, Desorption, Adsorptions- und Desorptionswärme

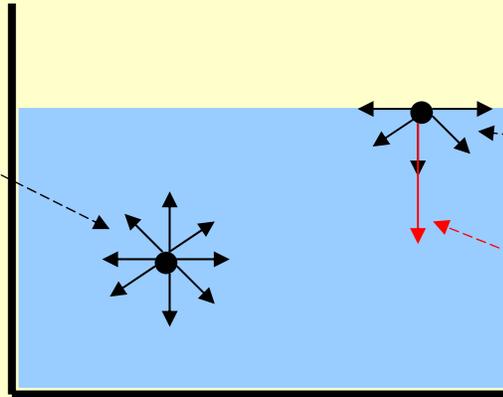
**2.6.3 Grenzflächeneffekte flüssig/fest:** Kapillarität, Zusammenhang von Aszension oder Depression mit Oberflächen- und Grenzflächenenergie, Randwinkel (Benetzungswinkel) und seine Abhängigkeiten (qualitativ)

**2.6.4 Bestimmung der Grenzflächenspannung:** Abreißmethode (Tensiometer), Stalagmometer, Kapillarmethode

**2.6.5 Adsorption an festen Grenzflächen:** Feststoff/Gas-Grenzfläche, Feststoff/Flüssigkeit-Grenzfläche, Adsorptionsisothermen: Langmuir, Freundlich (qualitativ); Chromatographie (s. PhAna 13), Bestimmung spezifischer Oberflächen, z.B. an Suspensionen

# Oberflächenspannung $\sigma$

anziehende Kräfte  
von Nachbarpartikeln  
im Volumen



anziehende Kräfte  
von Nachbarpartikeln  
an der Oberfläche

resultierende Kraft

Änderung der Oberflächenenergie  
durch Änderung der Oberfläche

$$\sigma = \frac{\Delta E_{\text{Ob}}}{\Delta A}, \quad [\sigma] = \text{J/m}^2$$

**Kohäsion:** zwischen gleichartigen Molekülen

**Adhäsion:** zwischen verschiedenen Molekülen

benetzende Flüssigkeiten: Adhäsion > Kohäsion

nicht-benetzende Flüssigkeiten: Kohäsion > Adhäsion

# Kapillarität/Normaltropfenzähler

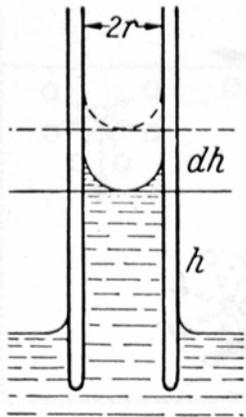


Abb. 3.26. Steighöhe einer benetzenden Flüssigkeit in einem engen Rohr

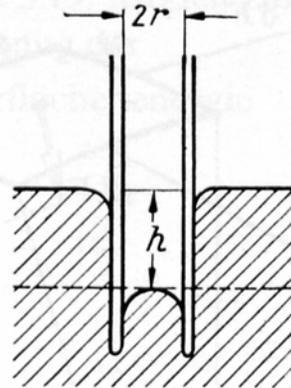


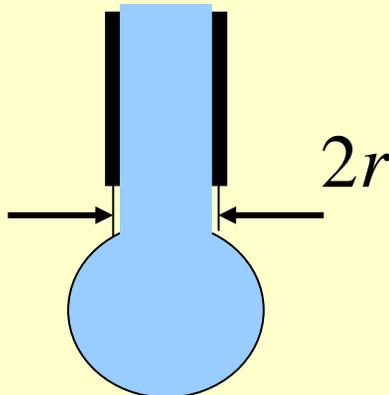
Abb. 3.27. Kapillardepression für eine nicht-benetzende Flüssigkeit

Steighöhe  $h$  (Meniskus):

$$h = \frac{2\sigma}{r\rho_{\text{Flü}}g}$$

$\rho_{\text{Flü}}$ : Dichte der Flüssigkeit

Normaltropfenzähler  
(Stalagmometer):



Tropfen reißt ab bei:

$$mg = 2\pi r\sigma$$

Schwerkraft = Kraft durch  
Oberflächenspannung

$$m = \rho V = \frac{2\pi r\sigma}{g}$$

Vorsicht:

$\sigma$  ist i. Allg. temperaturabh.

# Druck-Definition

Der Druck ist die Kraft, die eine Flüssigkeit auf eine gegebene Fläche ausübt:

*Druck=Kraft pro Fläche*

$$p = \frac{F}{A}$$

Einheit: (Pascal) Pa=N/m<sup>2</sup>

Normaldruck: 1013,25 hPa = 1 atm (Atmosphäre)

980,665 hPa = 1at (technische Atmosphäre)

1 bar = 100.000 Pa

1 Torr = 1,3332224 mbar

(760 mm Quecksilbersäule entspr. Normaldruck; 1 bar ~ 750 Torr)

Bei konstanter Dichte (Flüssigkeiten, aber nicht Gase) gilt

$$p = \rho g h$$

unabhängig von der Gefäßform!

(Hydrostatisches Paradoxon)

- 10 m Wassersäule entsprechen etwa 1 bar Druckdifferenz

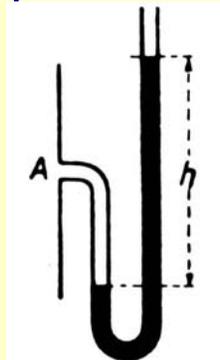


Abb.103. Flüssigkeitsmanometer

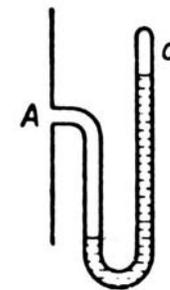
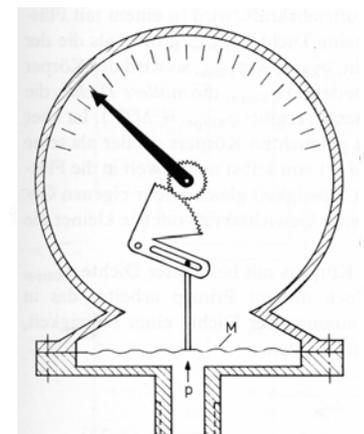
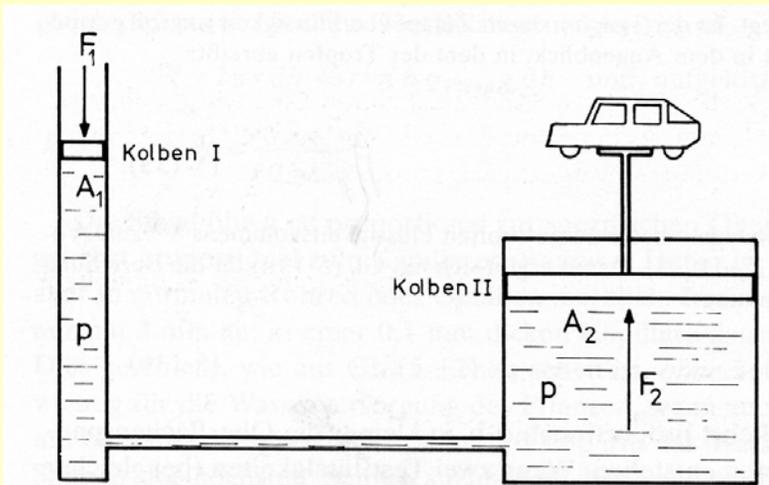


Abb. 104. Gasmanometer



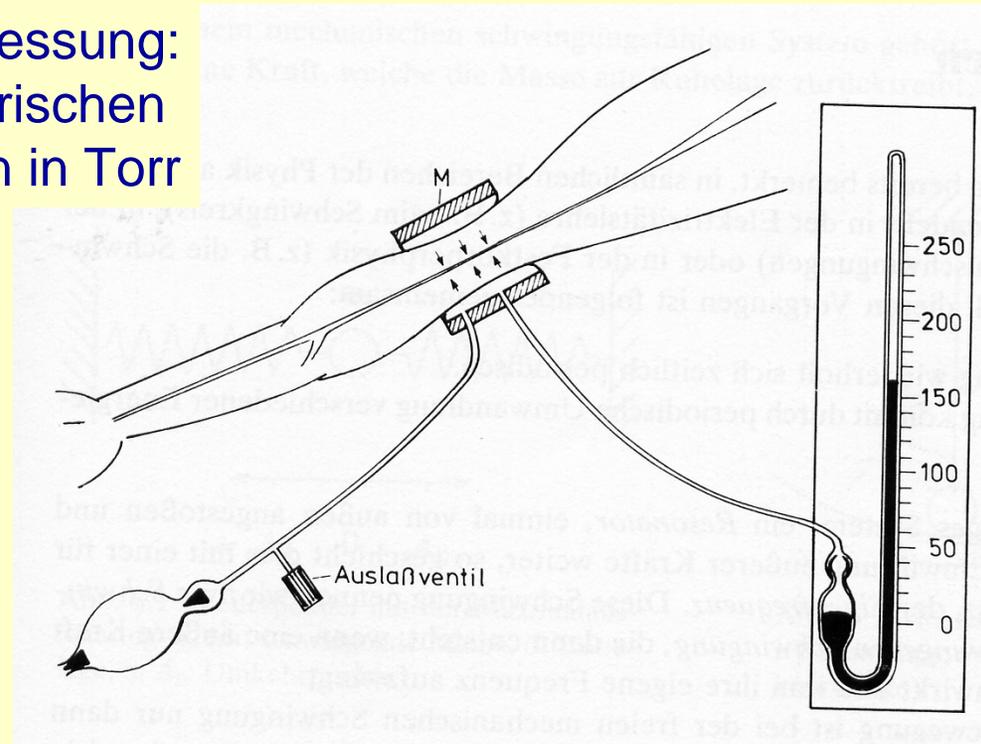
# Druckanwendungen

Blutdruckmessung:  
Druckangaben aus historischen  
Gründen in Torr



$$F_1 = p \cdot A_1 = \frac{A_2}{A_1} p \cdot A_1 = \frac{A_1}{A_2} p \cdot A_2$$

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2$$

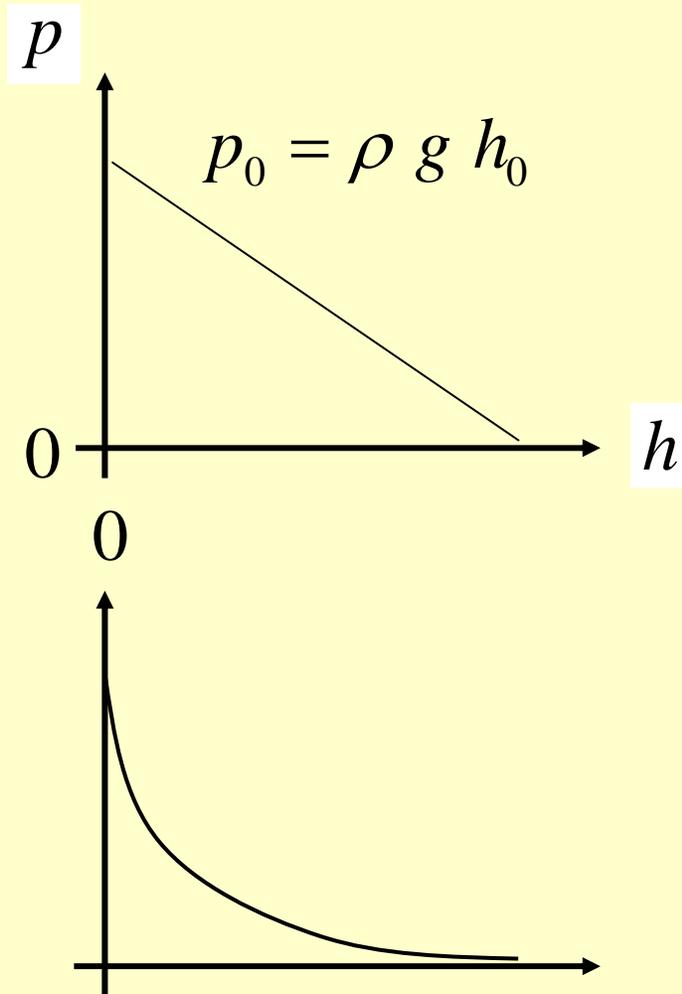


„Hydraulik“

Wie beim Hebel:

Kraftverringern wird bei gleicher Arbeit  
kompensiert durch Wegverlängerung.

# Druck unter einer Flüssigkeitssäule



Flüssigkeiten  
im Gravitationsfeld der Erde:  
Mit zunehmender Höhe über  
dem Boden des Flüssigkeitsgefäßes  
nimmt der Druck linear ab,  
denn Flüssigkeiten sind in  
erster Näherung inkompressibel.

Vgl. dagegen die  
Erdatmosphäre:  
Abnahme des Luftdrucks mit  
zunehmender Höhe zunächst stark,  
dann immer schwächer,  
denn Gase sind kompressibel,  
auch unter dem eigenen Gewicht.

# Barometrische Höhenformel

Gase sind im Ggs. zu Festkörpern und Flüssigkeiten sehr leicht zusammenzudrücken (kompressibel). Ideale Gase folgen dem Boyle-Mariotteschen Gesetz:  $p V = \text{const.}$

$$pV = p_0 V_0$$

$$\frac{pV}{m} = \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p_0 V_0}{m}$$

$$\rho = \rho(p) = \frac{\rho_0}{p_0} p$$

$$dp = -\rho g dh = -p \frac{\rho_0}{p_0} g dh$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dh$$

$$\int_{p_0}^{p_h} \frac{dp}{p} = \ln \frac{p_h}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g h$$

Die Atmosphäre wird von ihrem eigenen Gewicht zusammengedrückt.

bzw.

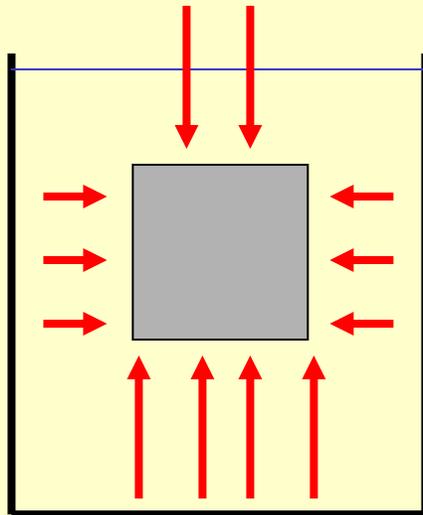
$$p_h = p_0 e^{-\frac{h}{H}}$$
$$\rho_h = \rho_0 e^{-\frac{h}{H}}$$

Barometrische Höhenformel mit (isothermische Atm.)

$$H = \frac{p_0}{\rho_0 g} \approx 8 \text{ km}$$

**Archimedisches Prinzip:** Die Auftriebskraft an einem Körper ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit:

$$F_A = V \cdot \rho_{\text{Flü}} \cdot g = m_{\text{Flü}} \cdot g$$



Wieso?  
Betrachte Quader:

$$\begin{aligned} F_A &= A \cdot \Delta p \\ &= A \cdot \Delta h \rho_{\text{Flü}} g \\ &= V \rho_{\text{Flü}} g \end{aligned}$$



287-212 v. Chr.

Gilt aber allgemein für alle Formen!

# Auftrieb/Dichtemessungen

Für die gesamte, am Körper angreifende Kraft erhält man also:

$$\begin{aligned} F_{ges} &= F_G - F_A = mg - m_{Flü}g \\ &= V\rho g - V\rho_{Flü}g = (\rho - \rho_{Flü}) \cdot Vg \end{aligned}$$

$$F_G < F_A, \text{ d.h. } mg < m_{Flü}g$$

**Steigen**

$$\rho < \rho_{Flü}$$

$$F_G = F_A, \text{ d.h. } mg = m_{Flü}g$$

**Schwimmen/Schweben**

$$\rho = \rho_{Flü}$$

$$F_G > F_A, \text{ d.h. } mg > m_{Flü}g$$

**Sinken**

$$\rho > \rho_{Flü}$$

Anwendungen in der **Dichtemessung**:

bei Festkörpern:

$$G = mg = \rho Vg$$

Gewicht  
ohne Auftrieb

$$A = G - G_{Flü} = \rho_{Flü} Vg$$

Gewicht in Flüssigkeit

$$\rho = \frac{G}{G - G_{Flü}} \rho_{Flü}$$

bei Flüssigkeiten:

Aräometer, Tauch- oder Senkspindel (z.B. zur Best. des Mostgewichts)  
oder Mohrsche Waage

### **2.5 Mechanik bewegter Flüssigkeiten und Gase (Fluide)**

**2.5.1 Kontinuitätsbedingung:** Prinzip, Anwendung auf Massen-, Stoffmengen- und Volumenstrom

**2.5.2 Bernoulli'sche Beziehung:** Grundzüge, Begriff des Staudrucks

**2.5.3 Viskosität:** Begriff der dynamischen Viskosität; Temperaturabhängigkeit (qualitativ); Charakteristik einer Newton'schen Flüssigkeit

**2.5.4 Strömungswiderstand:** Definition als Druckdifferenz/Volumenstrom; Strömungsleitwert; Druckdifferenz-Volumenstrom-Diagramm; Serien- und Parallelschaltung von Rohrleitungen, Analogie zu Kirchhoff'schen Regeln (s.a. 4.3.3)

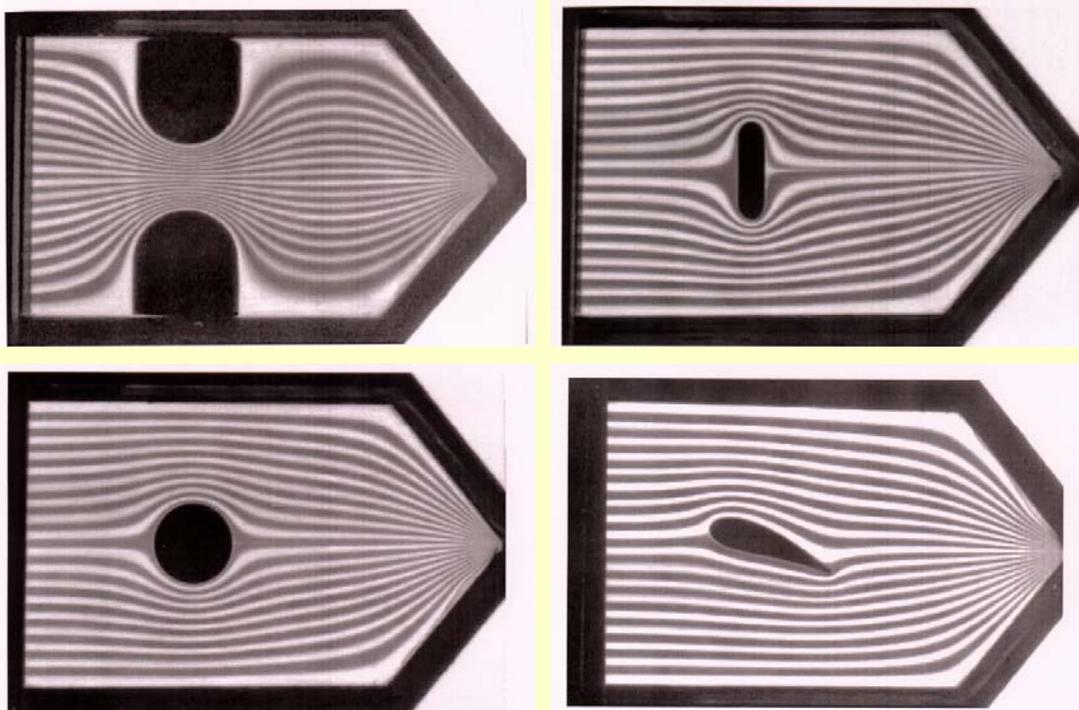
**2.5.5 Hagen-Poiseuille'sches Gesetz:** Anwendungsvoraussetzungen: laminare Strömung, Newton'sche Flüssigkeit; Zusammenhang mit Abmessungen, Druckdifferenz und Viskosität; Anwendung beim Kapillarviskosimeter

**2.5.6 Stokes'sche Beziehung:** Zusammenhang zwischen Abmessungen, Geschwindigkeit und Reibungskraft einer sinkenden Kugel

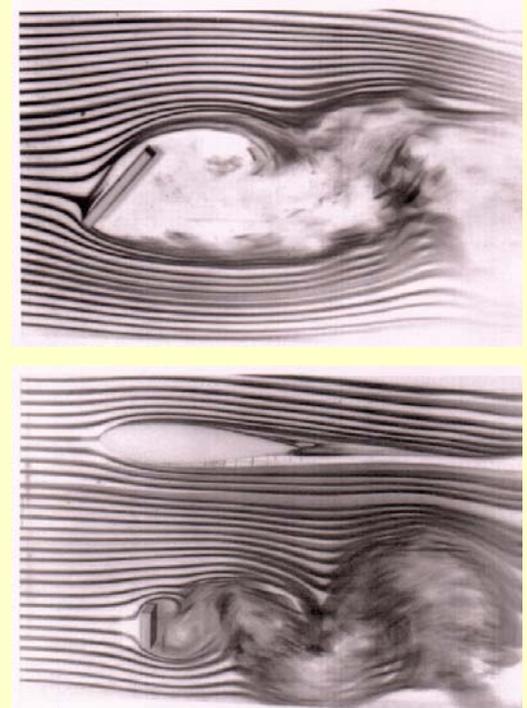
**2.5.7 Sedimentation:** Sedimentation im Schwerfeld; Wirkung der Zentrifuge (s.a. 2.2.5)

# Hydrodynamik

laminare Strömung



turbulente Strömung



Reynoldszahl = Beschleunigungsarbeit / Reibungsarbeit

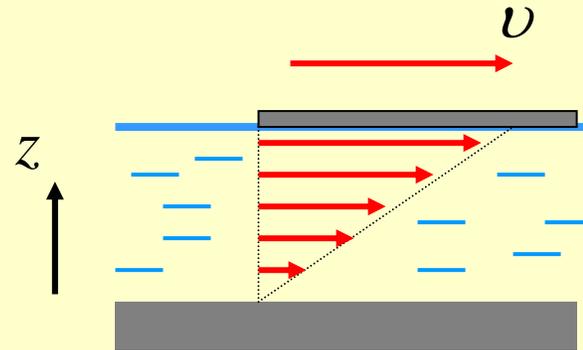
Turbulenzen ab  
 $R_{e,krit}$  von etwa 1100  
(abhängig z.B. von  
der Oberfläche)

$$R_e < R_{e,krit} = \frac{v_{krit} \rho r}{\eta} \quad \text{laminar}$$

$$R_e > R_{e,krit} \quad \text{turbulent}$$

für Rohr mit  
Radius  $r$

Laminares Strömungsprofil  
bei einer bewegten Platte



Die Newtonsche Gleichung  
verknüpft die Viskosität  $\eta$  mit  
einer tangential angreifenden  
(inneren) Reibungskraft.

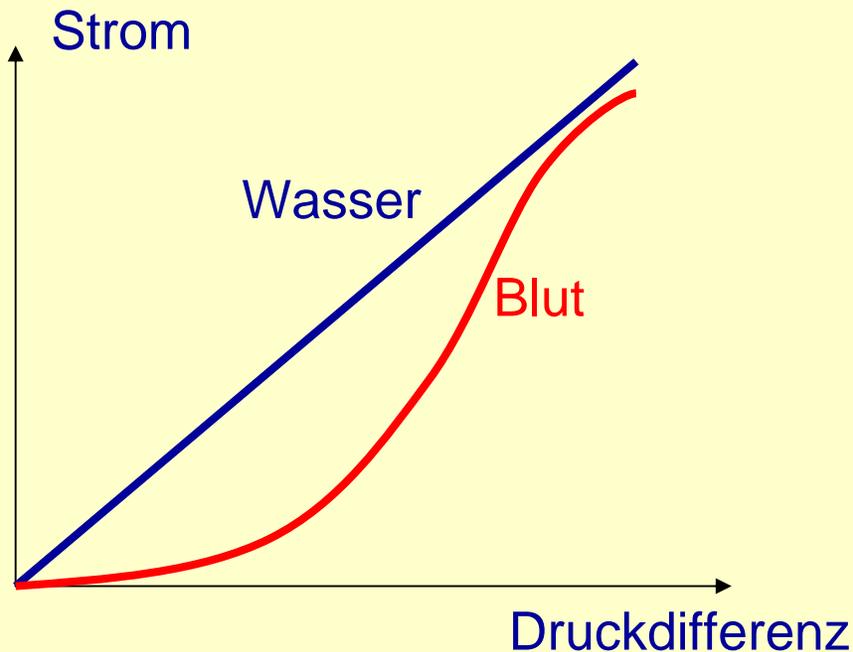
$$F = \eta \cdot A \frac{dv}{dz}$$

Einheit der Viskosität:  $[\eta] = 1 \text{ Pa s} = 1 \text{ N s/m}^2 = 1 \text{ kg / (m s)}$   
veraltet (cgs): Poise mit  $1 \text{ P} = 10^{-1} \text{ Pa s} = 1 \text{ g / (cm s)}$

**Newtonsche Flüssigkeiten:** Viskosität  $\eta = \text{const.}$  (Wasser, Hg, Öl)

**Nicht-Newtonsche Flüssigkeiten:**

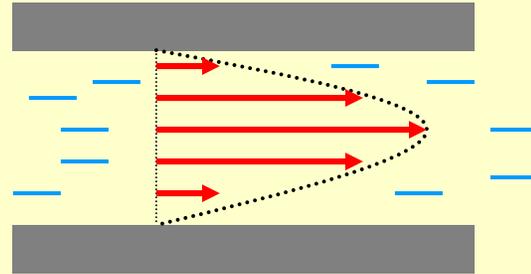
Viskosität  $\eta$  abhängig von  
Strömungsgeschwindigkeit  $v$   
(Erythrozyten, Blut)



Substanz	$\eta$ in Pa s
Öle	um 1
Glyzerin	0.83
Blut (w), Mittelwert	0.0044
Blut (m) Mittelwert	0.0047
Hg	0.0015
Wasser	0.001
Luft	0.000018

# Hagen-Poiseuille

Laminares Strömungsprofil  
in einem Rohr



Volumenstrom = Transportiertes Flüssigkeitsvolumen  
pro Zeit

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

**Hagen-Poiseuillesches Gesetz:**

Laminarer Volumenstrom durch ein Rohr:

$$I = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi \Delta p \cdot r^4}{8 \eta l}$$

$$I = \frac{\pi r^4}{8 \eta l} \Delta p = \frac{\Delta p}{R}$$

=> Strömungswiderstand

$$R = \frac{\Delta p}{I}$$

Reihenschaltung (Serien-, hintereinander) von Röhren:

$$R_{ges} = R_1 + R_2 + \dots$$

Parallelschaltung von Röhren:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$$

(Vgl. bei elektr. Strömen:  
Kirchhoffsche Regeln)

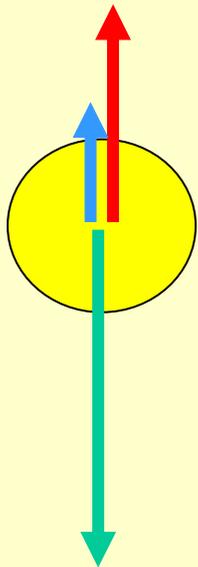
# Sedimentation

Konstante Sinkgeschwindigkeit (von Kugeln in Flüssigkeiten),  
d.h. Körper im Kräftegleichgewicht:

$$F_G = F_A + F_R$$

← Stokes  
↓

$$\frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{Kugel} g = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{Flüssigkeit} g + 6\pi\eta v r = 0$$



Sinkgeschwindigkeit

$$v_s = 2r^2 \left( \rho_{Kugel} - \rho_{Flüssigkeit} \right) \frac{g}{9\eta}$$

Bei „Ultrazentrifugen“

$$a \geq 100\,000\ g$$

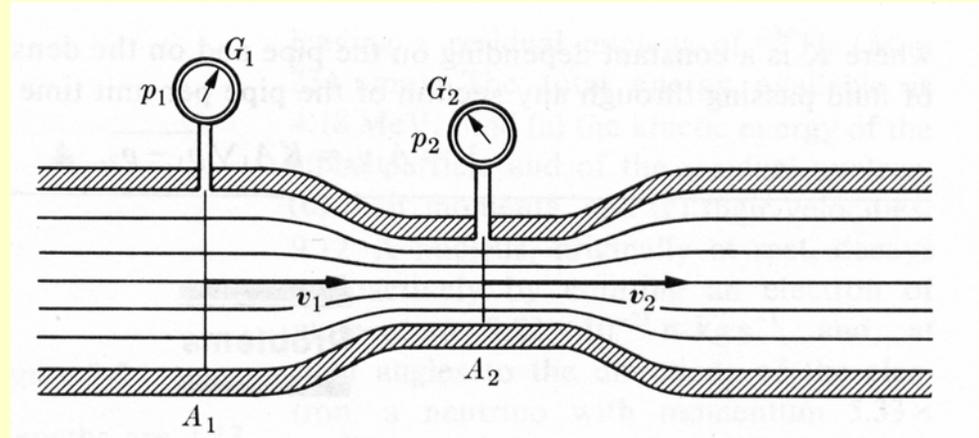
# Kontinuität, Bernoulli

$$I = \frac{dV}{dt} = \text{const.}$$

→  $A \cdot v = \text{const.}$

## Kontinuitätsgleichung

An einer Engstelle ist die Strömungsgeschwindigkeit hoch. Energieerhaltung: :



$$pV + \frac{m}{2} v^2 = pV + \frac{\rho}{2} V v^2 = \text{const.}$$

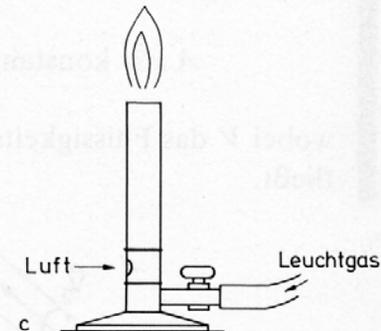
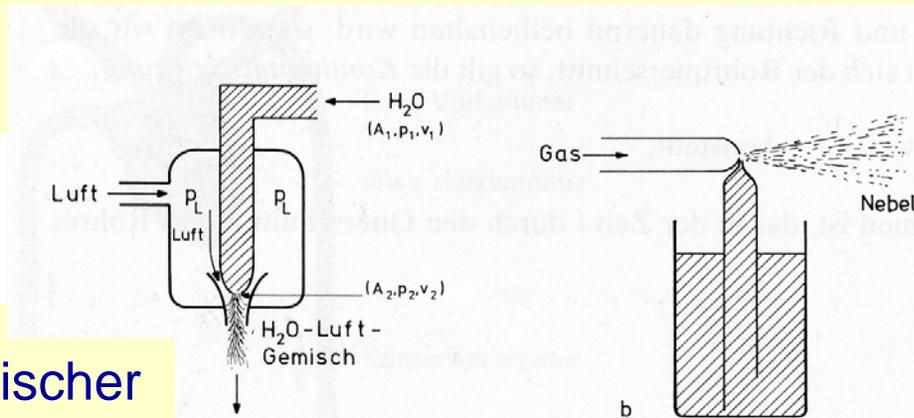
daraus folgt:

## Bernoulli-Gleichung

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 = \text{const.}$$

↑  
statischer  
Druck

↑  
dynamischer  
Druck  
Staudruck



(a) Wasserstrahlpumpe, (b) Zerstäuber, (c) Bunsenbrenner.

# Bernoulli-Gleichung

$$p + \rho g h + \frac{\rho}{2} v^2 = \text{const.}$$

↑ ↑ ↑ ↑  
 Staudruck  
 Schweredruck

An der Engstelle einer Strömung ist der Druck vermindert.

## Statischer Druck

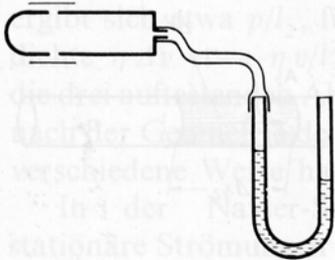


Abb. 3.51. Manometer zur Messung des statischen Druckes  $p$  in einem strömenden Gas

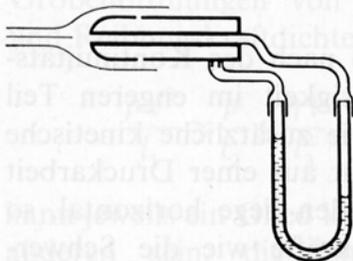
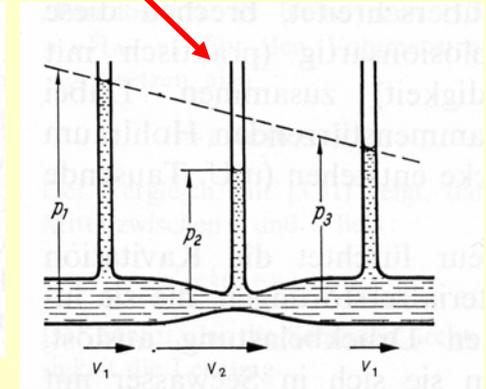
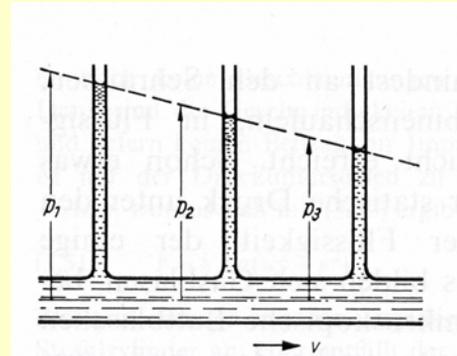
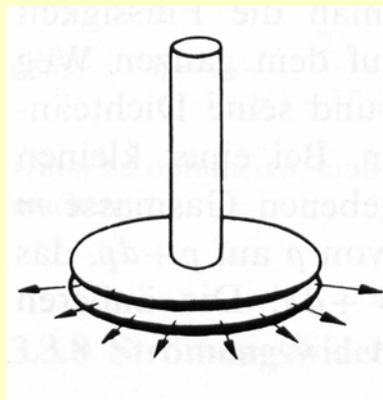


Abb. 3.52. Prandtl'sches Staurohr.  $\frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 - p$  ist gleich der Druckdifferenz der Flüssigkeitssäulen im Manometer



durchströmtes Rohr ohne und mit  
Einschnürung



hydrodynamisches  
Paradoxon

# **Ende Mechanik-Teil der Vorlesung**

---

**Aber nicht Ende**

**der verschiedenen Aspekte**

**der Mechanik**

**und ihrer Anwendungen!**

**=> Siehe Lehrbücher**