2 Mechanik 2.1 Bewegungen

2.1.1 Geschwindigkeit, Beschleunigung: Definitionen, vektorielle Zusammensetzung von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen

2.1.2 Geradlinige Bewegungen: Zusammenhang von Beschleunigung, Geschwindigkeit, Weg und Zeit; einfache Beispiele mit konstanter Beschleunigung

2.1.3 Rotationsbewegungen: Zusammenhang von Winkelbeschleunigung, Winkelgeschwindigkeit, Winkel und Zeit; einfache Beispiele mit konstanter Drehzahl (Darstellung mittels Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz und Umfangsgeschwindigkeit)

2.1.4 Zeitabhängige Vorgänge: Nichtperiodische, allgemein-periodische und harmonische Vorgänge, Periodendauer und Frequenz, Einordnung einfacher Beispiele; Überlagerung von harmonischen Schwingungen in einfachen Fällen

2.1.5 Momentanwert und Mittelwert: Definitionen, Vergleich bei einfachen Vorgängen, z.B. beschleunigter Bewegung, harmonischem Vorgang

24./25. Okt. 2007 Experimente

– Meßgeräte zur Bestimmung von Länge, Fläche etc.

– Zeitmessung auf Luftkissenbahn

– s-t - Diagramme

– Grundgesetz der Mechanik: $F = m\,a$
Messung der Beschleunigung bei unterschiedlicher Kraft bzw. Masse

– konstante Beschleunigung beim freien Fall (mit Messwerten)

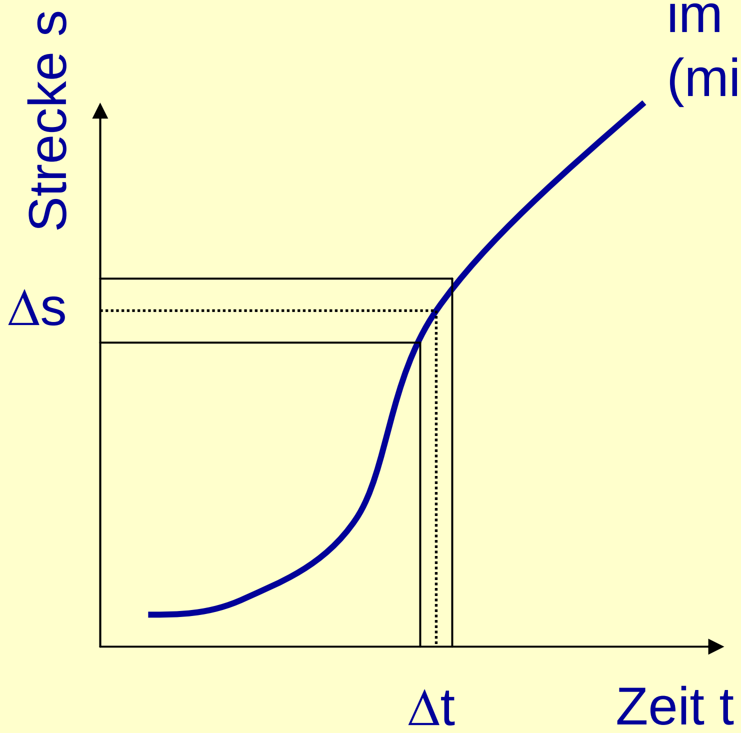
– Fallröhre mit Luft bzw. unter Vakuum

– Im freien Fall: Wegziehen von Papier zwischen zwei Gewichten

– Trägheit:
  - Wegziehen von Papier unter Münze auf Becher
  - Hammerschläge auf Hand (bzw. Klotz dazwischen)
  - „Einstein-Versuch“ (Kugel an Feder soll in Trichter)

Kinematik 1

Kinematik ist die Lehre von den Bewegungen im Raumunter Absehung von den Kräften.
(mit Kräften „Dynamik“, folgt in Kürze!)



$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

Translation:

„Strecke“, besser: Ort (in m) s

Geschwindigkeit (in m/s) $v = \frac{ds}{dt}$

Beschleunigung (in m/s²) $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$

Translation (Bewegung von einem Ort zum anderen):

„Strecke“, besser: Ort (in m)	s
Geschwindigkeit (in m/s)	$v = \frac{ds}{dt}$
Beschleunigung (in m/s^2)	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

analog
Rotation (Drehbewegung um eine Achse):

Winkel (in rad)	ϕ
Winkelgeschwindigkeit (in rad/s)	$\omega = \frac{d\phi}{dt}$
Winkelbeschleunigung (in rad/s^2)	$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$

Kinematik 3

Bisherige Beschreibung der Bewegung eindimensional.
Tatsächlich finden die Bewegungen im dreidimensionalen Raum statt.
Das bedeutet für die

Translationen:
Es gibt jeweils drei Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten der entsprechenden Vektoren.
Man unterscheidet hier auch zwischen
dem Vektor der Geschwindigkeit (engl. velocity)
und seinem Betrag, der Bahngeschwindigkeit (engl. speed)

Rotationen:
Die entsprechenden Achsen
(für Winkel, Winkelgeschwindigkeiten
und –beschleunigungen)
werden ebenfalls durch Vektoren ausgedrückt
(die in ihren Richtungen nicht übereinstimmen müssen!)

2.2 Kraft, Drehmoment

2.2.1 Kräfte: Vektorielle Addition von Kräften, Zerlegung einer Kraft in Komponenten vorgegebener Richtung (Kräfteparallelogramm)

2.2.2 Newton’sche Prinzipien: Trägheitsprinzip; Zusammenhang zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung; Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung (actio **=** reactio)

2.2.3 Kräfte und Bewegungen: Einfache Beispiele (konstante Beschleunigung oder Verzögerung); Zusammenhang von Masse und Gewichtskraft, Fallbeschleunigung, freier Fall; Reibungskräfte (Richtung, Bremswirkung)

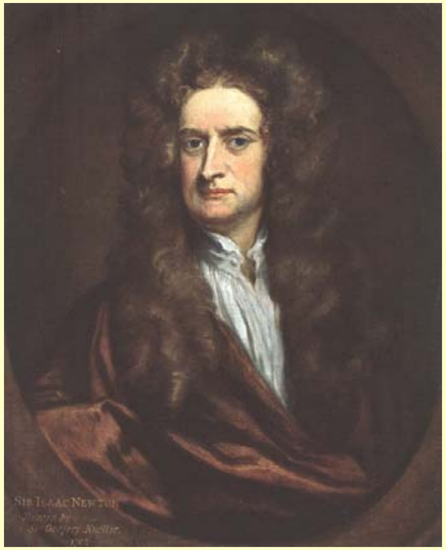
2.2.4 Drehmoment, Hebelgesetz: Zusammenhang des Drehmoments mit Kraft und Hebelarm, Gleichgewichtsbedingung, Behandlung einfacher Beispiele, z.B. Hebel, Waage

2.2.5 Fliehkraft: Betrag und Richtung der Zentrifugalkraft bei einer gleichförmigen Kreisbewegung (s.a. 2.5.7); Zentrifuge

2.2.6 Verformungen: Zusammenhang zwischen Kraft und Längenänderung einer elastischen Feder (Federkonstante); plastische Verformungen

2.2.7 Dichte: Dichte, relative Dichte, mittlere Dichte von Haufwerken (Pulvern); Porosität

Newtonsche Axiome



1642-1747

1. **Newtonsches Axiom**: Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der geradlinigen, gleichförmigen Bewegung, solange die Summe der einwirkenden Kräfte Null ist.

2. **Newtonsches Axiom**: Die Beschleunigung ist proportional der angreifenden Kraft,

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

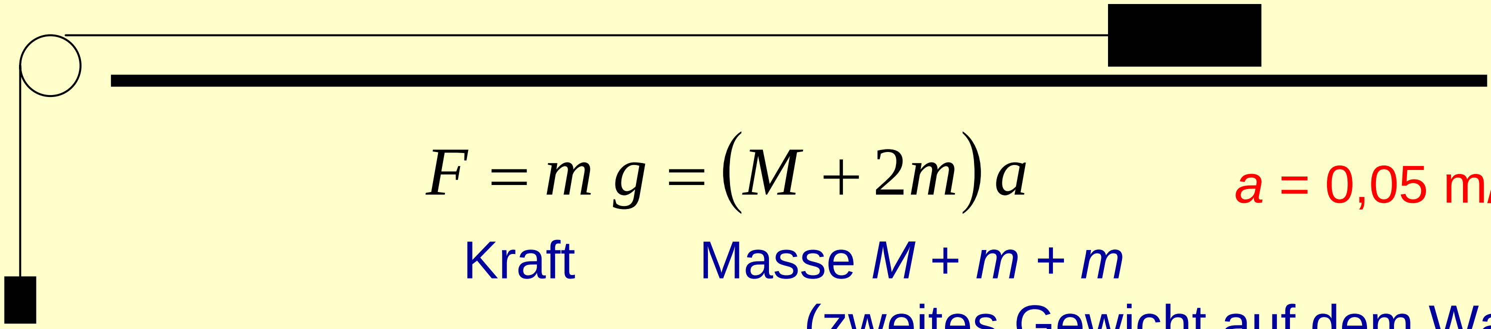
   Die Proportionalitätskonstante ist die Masse *m.*
   Bemerkung: Hier ist die „träge Masse“ gemeint.

3. **Newtonsches Axiom**: *actio=reactio*; die Erfahrung zeigt, daß, wenn ein Körper A auf einen Körper B eine Kraft F_{AB} ausübt, der Körper B umgekehrt auch eine Kraft F_{BA} ausübt. Die Kräfte sind entgegengesetzt und gleich groß, also

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Beschleunigung von Luftkissenwagen

Luftkissenwagen der Masse *M* wird beschleunigt durch Schwerkraft, die über eine Rolle an einem kleinen Gewicht der Masse *m* angreift.



$$F = m\,g = (M + 2m)\,a$$

a = 0,05 m/s^2

Kraft   Masse $M + m + m$

(zweites Gewicht auf dem Wagen)

$$\frac{m}{M} \approx \frac{a}{g} \approx \frac{0{,}05\ \mathrm{m/s^2}}{10\ \mathrm{m/s^2}} \approx 0{,}5\ \%$$

Wiegen ergibt M = 194 g

m = 1 g

Verdopplung der Kraft: $$2m\,g = (M + 2m)\,a$$

a = 0,10 m/s^2

Erhöhung (fast Verdopplung) der Trägheit (durch zweiten Wagen):

$$m\,g = (2M + 2m)\,a$$

a = 0,03 m/s^2

Kombination: $$2m\,g = (2M + 2m)\,a$$

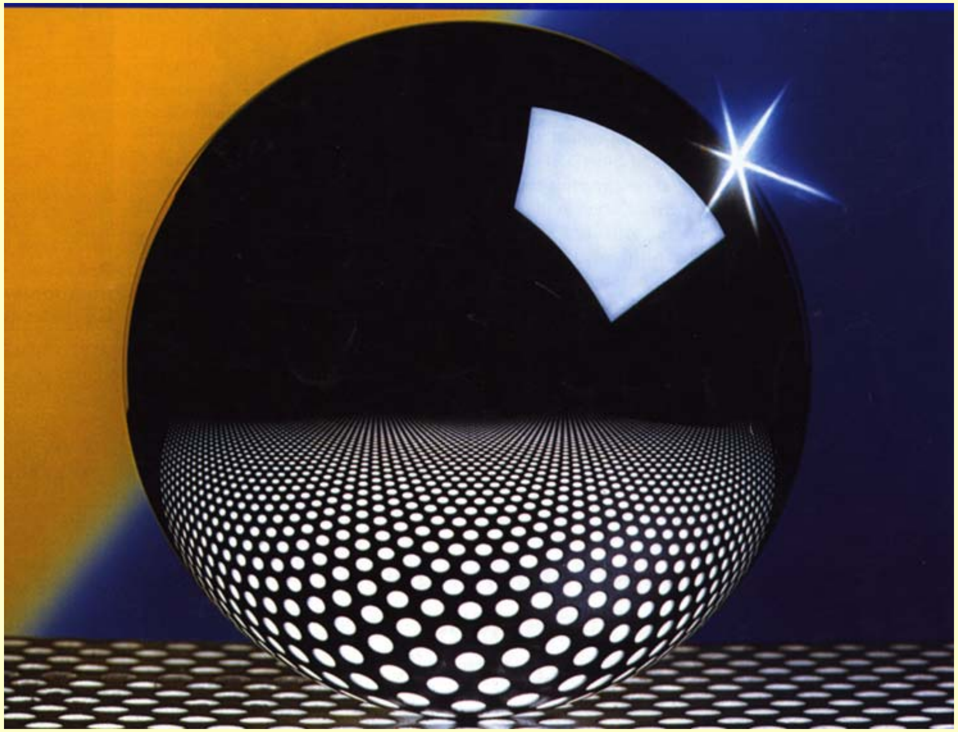
a = 0,055 m/s^2

Bemerkung: Auch die Rolle wird beschleunigt!

Massenstandard

Das Ur-Kilogramm im Bureau International des Poids at Mesures in Paris

Zylinder aus Pt-Ir-Legierung



Kugel aus hochreinem, einkristallinem Silizium
→ Zählen von Atomen

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$ Gravitations-Gesetz

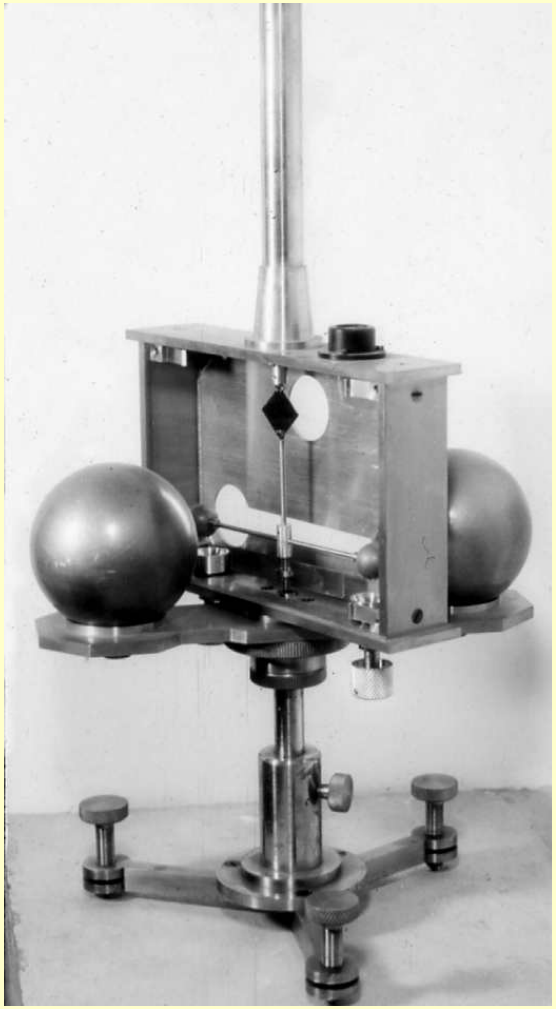
$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 s^{-2} kg^{-1}}$$

$$1\mathrm{N(Newton)} = 1\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Ein **Feld** ordnet jedem Punkt des Raumes eine bestimmte physikalische Größe zu.

Hier: Schwerefeld (der Erde)

Bemerkung:
Mit diesem Versuch wurde gamma
und damit die Masse der Erde bestimmt!



„Gravitations-Waage“

Fallbeschleunigung

Kann die Reibung vernachlässigt werden, so gelten für alle Körper die gleichen Fallbeschleunigungen im Gravitationsfeld der Erde.

Newton: $$F = m \cdot a = \gamma \frac{m \cdot m_{\mathrm{Erde}}}{\mathrm{r}^2}$$

träge bzw. schwere Masse sind gleich
(Einstein, allg. Relativitätsth.)

Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche $$g = \gamma \frac{m_{\mathrm{Erde}}}{\mathrm{r}_{\mathrm{Erde}}^2} \approx 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Aus g, $\mathrm{r}_{\mathrm{Erde}}$ und γ
folgt die Erdmasse!

Genauer Wert ist ortsabhängig!
(Abstand vom Erdmittelpunkt
plus „Zentrifugalkraft")

Fallversuch

Gemessen wird die Fallzeiten *t* für die Fallhöhen 0,2 m bzw. 0,8 m.

Die Bestimmung der Fallgeschwindigkeit v erfolgt
nach der Beziehung $v = \Delta s / \Delta t$.

Hierbei ist Δt die Zeitspanne, die beim Verdunkeln der Lichtschranke durch den Fallkörper vergeht.
(Länge des Fallkörpers Δs = 20 mm)

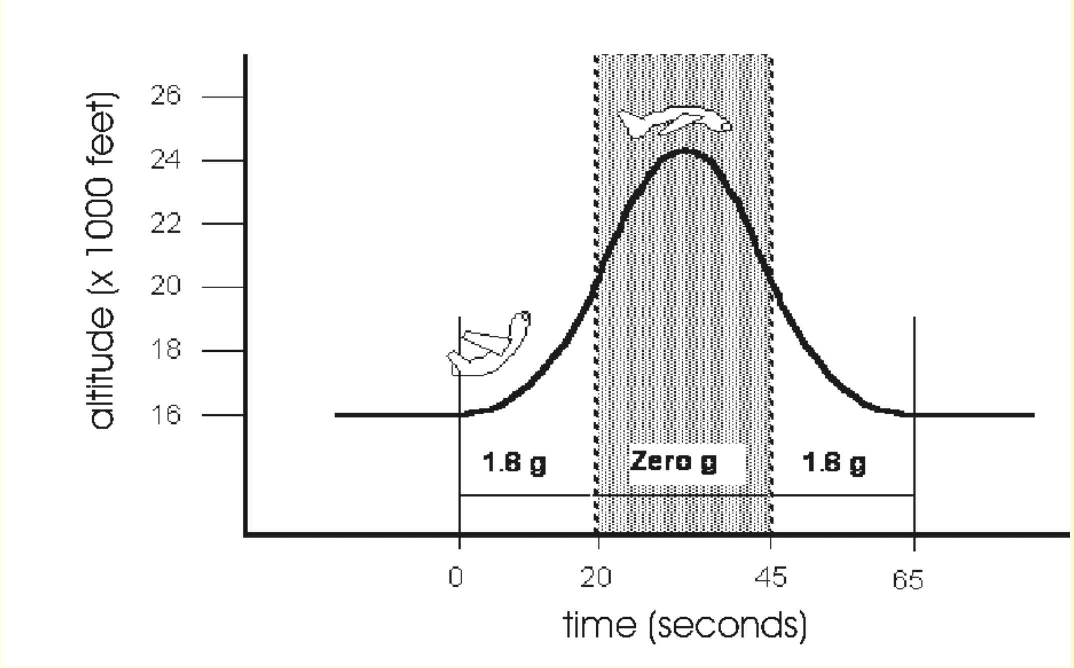
s in m	0,2	0,8		
t in s	0,2	0,4	→	δt = 0,2 s
Δt in ms	10	5		
υ in m/s	2	4	→	$\delta \upsilon$ = 2 m/s

Mithilfe dieser Werte erhält man für die
Fallbeschleunigung den Wert $g = \delta v / \delta t$ = (2 m/s) / (0,2 s) = 10 m/s^2.

Schwerelosigkeit

In gewissem Sinne paradox:
Im „freien Fall“
erfährt man
„Schwerelosigkeit“

„Parabelflug“



Freier Fall

Ohne Beschleunigung ($a = 0$):
Gleichförmige Bewegung, v = const.
Damit (Integrieren!) Ort x (manchmal auch s genannt)

$$x = v\, t$$

bzw. allgemeiner $x = v\, t + x_0$
(x_0 heißt Anfangswert)

Beim freien Fall
konstante Beschleunigung $a = g$

Damit $v = g\, t$
und durchfallene Höhe

$$h = (g/2)\, t^2$$

Wurfparabel

a) „Fallgesetz“, wobei zunächst Bewegungsrichtung nach oben
b) zwei-dimensionale Bewegung, da auch „nach der Seite“

ad a) konst. Beschleunigung führt durch Integration und Einsetzen der Anfangsbedingungen zum Ort

$$y = \frac{g}{2}t^2 + v_{0,y}t + y_0$$

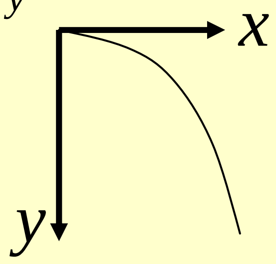
ad b) Analog für die gleichförmige Bewegung in x-Richtung:

$$x = +v_{0,x}t + x_0$$

Vereinfachung mit „horizontalem Wurf“ und $x_0 = y_0 = v_{0,y} = 0$

Auflösen nach t und Einsetzen in y-Gleichung führt zur Parabelform:

$$y = \frac{g}{2\,v_{0,x}^2}x^2$$

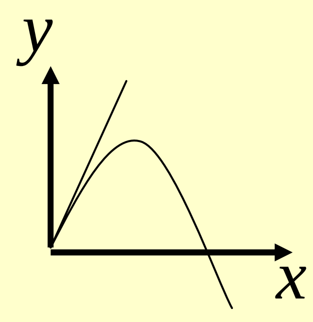


Beim „schiefen Wurf“ werden eine Anfangsgeschwindigkeiten in x- und y-Richtung angenommen und oft durch den Winkel gegen die Horizontale ausgedrückt.

$$v_{0,x} = v_0 \cos\alpha$$

$$v_{0,y} = v_0 \sin\alpha$$

$$v_0^2 = v_{0,x}^2 + v_{0,y}^2$$



1. / 7. / 8. Nov. 2007 Experimente

– Federpendel, Fadenpendel

– (Luftballon-)Rakete an Faden

– Reibungskräfte

– Schwerpunkt (Massenmittelpunkt)

– Gleichgewicht

– Rotationskräfte (Zentrifugalkraft, Corioliskraft)
  Vorführung von Kreiseln

(Feder-) Schwingung

$$F = -k \cdot x$$

$$m \cdot a = -k \cdot x$$

Rückstellkraft *F* proportional zur Auslenkung *s*. Proportionalität mit Federkonstante *k*.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Differentialgleichung

Lösungen $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$ und $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

„Harmonische Bewegung“

mit „Kreisfrequenz“

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Schwingungsdauer *T*

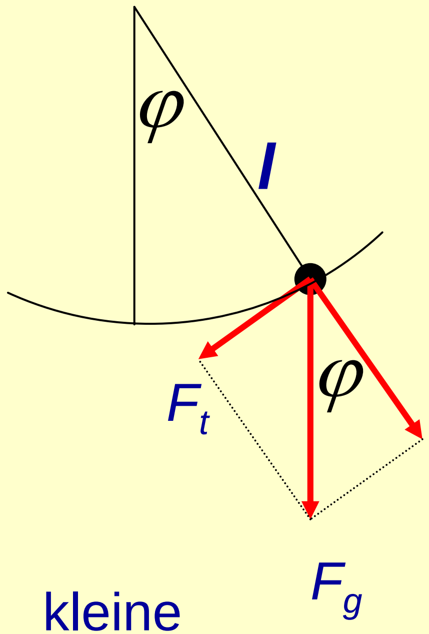
d.h. Frequenz

$$\upsilon = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{1}{\upsilon} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Fadenpendel

Bewegung auf Kreisbogen ***s***
bei Pendellänge = ***l***



$$ma = m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -F_t$$

$$= -F_g \sin\varphi$$

$$= -mg\sin\varphi$$

$$a = -g\sin\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + g\sin\varphi = 0$$

kleine Winkel

$$\sin\varphi \approx \frac{s}{l}$$

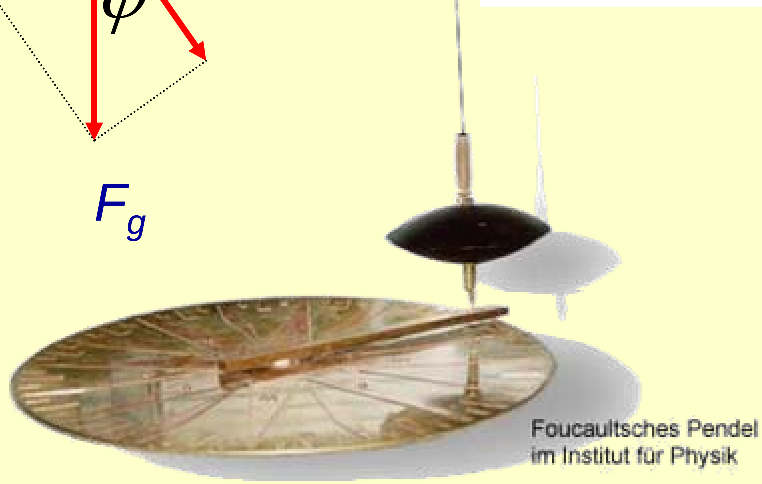
$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}s \approx 0$$

$$\boxed{T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Im altenGebäude
des Inst. f. Physik

$$l = 15.2\,\mathrm{m}$$

$$T = 7.8\,\mathrm{s}$$



Foucaultsches Pendel
folgt der Coriolis-Kraft.

Bei Pendellänge ***l* =1m**
halbe Schwingungsperiode
von etwa ***T*/2 = 1s .**

2.3 Energie, Leistung, Impuls

2.3.1 Arbeit, Energie: Zusammenhang mit Kraft und Weg, auch bei nicht konstanter Kraft und für den Fall, dass die Kraft nicht parallel zum Weg angreift; kinetische Energie der Translation und Rotation; potentielle Energie, Berechnung einfacher Beispiele wie senkrechte Bewegung im Schwerefeld (Hubarbeit); Bewegung auf der schiefen Ebene; Verformung einer Feder

2.3.2 Energieerhaltungssatz (s.a. 3.3.3): Kinetische Energie der Translation; einfache Anwendungen des Energieerhaltungssatzes aus der Mechanik (Energieformen und ihre Umwandlungen für die senkrechte Bewegung im Schwerefeld, Energieformen und ihr periodischer Wechsel beim Federpendel), Einfluss der Reibung (Prinzip)

2.3.3 Leistung: Zusammenhang mit Energie, Arbeit und Zeit

2.3.4 Impuls, Impulserhaltungssatz: Zusammenhang mit Masse und Geschwindigkeit; vektorielle Darstellung; Anwendung auf einfache elastische und unelastische zentrale Stöße

2.3.5 Drehimpuls: Zusammenhang mit Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit; Drehimpulserhaltungssatz

Arbeit, Energie und Leistung

Unter Arbeit versteht man das Produkt aus Kraft und Weg.

$$W = F \cdot s$$

bei konstanter Kraft

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s}$$

allgemeine Formulierung

Einheit $\mathrm{J} = \mathrm{Nm}$

Joule

Beispiele:

$$W_H = mgh$$

Hub-

$$W_B = mas = \frac{m}{2} v^2$$

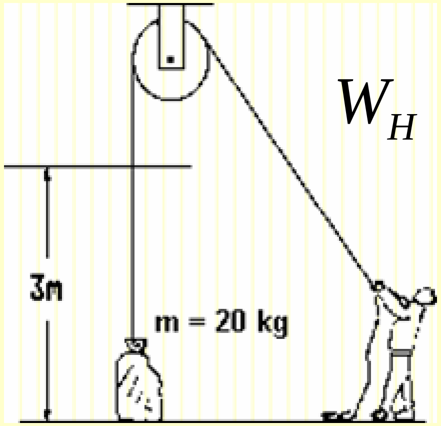
Beschleu-nigungs-

$$W_F = \frac{1}{2} k s^2$$

Verformungs-

$$W_R = F_R \, s$$

Reibungs-arbeit



$$W_H \approx 600\,\mathrm{J}$$

Leistung ist das Verhältnis von geleisteter Arbeit zu benötigter Zeit

$$P = \frac{W}{t}$$

hier für Arbeit

$$[P] = \mathrm{J} / \mathrm{s} = \mathrm{W}$$

hier Einheit Watt

Energie-Erhaltung

Unter Energie versteht man die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.
(Einheit J = Nm)

"Fallkraft (heutiger Begriff: potentielle Energie), Bewegung (kinetische Energie), Wärme, Licht und Elektrizität sind ein- und dasselbe Objekt in verschiedenen Erscheinungsformen".

R. Mayer: 1814-1878

$$E_{\text{pot}} = mgh$$ potentielle Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$ kinetische Energie

Energieerhaltungssatz der Mechanik: $E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{const.}$

$$E = mc^2$$

Energie und Masse sind zwei äquivalente Erscheinungsformen der Materie

Geschwindigkeit nach freiem Fall

Wozu sind Energieerhaltungssätze gut?
- Verständnis der fundamentalen Zusammenhänge
- Erleichterung bei der Berechnung konkreter Größen

Beispiel: Geschwindigkeit nach freiem Fall

aus Lösung der DGL

jeweils durch Integrieren

$$ma = mg$$

$$\upsilon = gt \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{\upsilon}{g}$$

$$h = \frac{g}{2}t^2 = \frac{g}{2}\frac{\upsilon^2}{g^2} = \frac{\upsilon^2}{2g}$$

$$\upsilon = \sqrt{2gh}$$

bzw. über den Energie(erhaltungs)satz

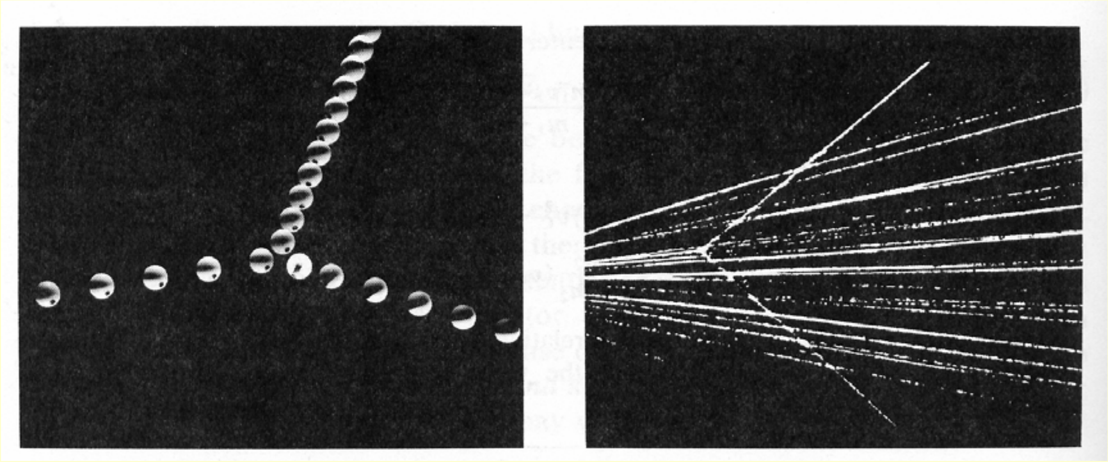
$$E_{\text{kin, nachher}} = E_{\text{pot, vorher}}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}\upsilon^2 = gh$$

$$\upsilon = \sqrt{2gh}$$

Stoß und Impuls



$$\vec{p} = m\vec{v}$$ Impuls

2. Newtonsches Axiom: (Alternative Formulierung)
Die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers ist gleich der Summe der angreifenden Kräfte

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Impulserhaltung:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_{\text{ges}} = \text{const.}$$

Bemerkung: Vorausgesetzt wird die Betrachtung eines „abgeschlossenen“ Systems.

Stossgesetze 1

Betrachte Körper 1 und 2 mit Massen m_1 bzw. m_2
und Geschwindigkeiten vorher $v_{1,2}$ nachher $u_{1,2}$

vorher nachher

Impuls(erhaltungs)satz: $$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2$$

Beschränkung auf elastischen Stoß
(im Gegensatz zu inelastisch; vgl. auch „superelastisch“)
Dann Energie(erhaltungs)satz:

$$\frac{m_1}{2} \cdot v_1^2 + \frac{m_2}{2} \cdot v_2^2 = \frac{m_1}{2} \cdot u_1^2 + \frac{m_2}{2} \cdot u_2^2$$

Zusätzlich Beschränkung auf zentralen Stoß (Gegensatz zu exzentrisch)
(dann 1-dim. Problem, d.h. es reicht die Betrachtung
einer Komponente der Vektoren)

Stossgesetze 2

$$\frac{m_1}{2}\cdot v_1^2 + \frac{m_2}{2}\cdot v_2^2 = \frac{m_1}{2}\cdot u_1^2 + \frac{m_2}{2}\cdot u_2^2 \longrightarrow m_1\cdot\left(v_1^2 - u_1^2\right) = m_2\cdot\left(u_2^2 - v_2^2\right)$$

$$m_1\cdot\left(v_1 - u_1\right)\cdot\left(v_1 + u_1\right) = m_2\cdot\left(u_2 - v_2\right)\cdot\left(u_2 + v_2\right)$$

$$m_1\cdot v_1 + m_2\cdot v_2 = m_1\cdot u_1 + m_2\cdot u_2 \longrightarrow m_1\cdot\left(v_1 - u_1\right) = m_2\cdot\left(u_2 - v_2\right)$$

also $\quad v_1 + u_1 = u_2 + v_2$

oder $\quad v_1 - v_2 = u_2 - u_1$

Der Betrag der Relativgeschwindigkeit ändert sich nicht.

Einsetzen von u_2 bzw. u_1 ergibt für die Endgeschwindigkeiten:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad \text{bzw.} \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

Stossgesetze 3

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad \text{und} \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

Betrachte die Spezialfälle:

a) Bei gleichen Massen $m_1 = m_2 = m$

→ $u_1 = v_2$ und $u_2 = v_1$ d.h. Austausch der Geschwindigkeiten

b) Bei sehr großer Masse $m_2 >> m_1$ und $v_2 = 0$

→ $u_1 \approx -v_1$ und $u_2 \approx 0$ d.h. Übertrag des doppelten Impulses aber keine Energie-Übertragung!

c) Bei sehr großer Projektilmasse $m_1 >> m_2$ und $v_2 = 0$

→ $u_1 \approx v_1$ und $u_2 \approx 2v_1$ d.h. kaum Energie- und Impuls-Übertrag, aber Teilchen 2 hat nach dem Stoß die doppelte Geschwindigkeit von Teilchen 1

Ballistisches Pendel

Ein Pendelkörper (Masse *M* = 44g) sei zunächst in Ruhe
und werde dann von einem Projektil (Masse *m* = 0,45 g) getroffen.

Die Geschwindigkeit des Projektils *v* wird aus der Höhe *h* bestimmt,
bis zu der der Pendelkörper (samt absorbiertem Projektil) schwingt.
Beachte: Die kinetische Energie ist hier keine Erhaltungsgröße!

Aus der Impulserhaltung $mv = (M+m)u$

Folgt die Geschwindigkeit des Pendelkörpers *u* unmittelbar
nach dem Aufprall. Die kinetische Energie wird danach in potentielle
Energie umgewandelt, sodass

$$\frac{M+m}{2}u^2 = \frac{M+m}{2}\left(\frac{m}{M+m}v\right)^2 = \frac{m^2}{2(M+m)}v^2 = (M+m)gh$$

Für *h* = 5cm liefert der Versuch
Einen Wert von ca. 100 m/s.

$$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}$$

Raketengleichung

- Rakete (Masse *m(t)*, Geschwindigkeit *v(t)*) funktioniert nach dem „Rückstoß-Prinzip", das aus der Impulserhaltung folgt.
- Das Treibmittel wird mit großer Geschwindigkeit *w* in die Richtung entgegen der eigenen Beschleunigung ausgestoßen.
- Damit ändert sich die Raketenmasse als Funktion der Zeit!

Impulserhaltung:

$$w \cdot \left(-\frac{dm}{dt} \right) = m\frac{d\upsilon}{dt} = ma$$

„Schub" (sei hier konstant)

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{w}\frac{d\upsilon}{dt}$$

Lösung der DGL:

$$\ln\frac{m}{m_0} = -\frac{\upsilon}{w}$$

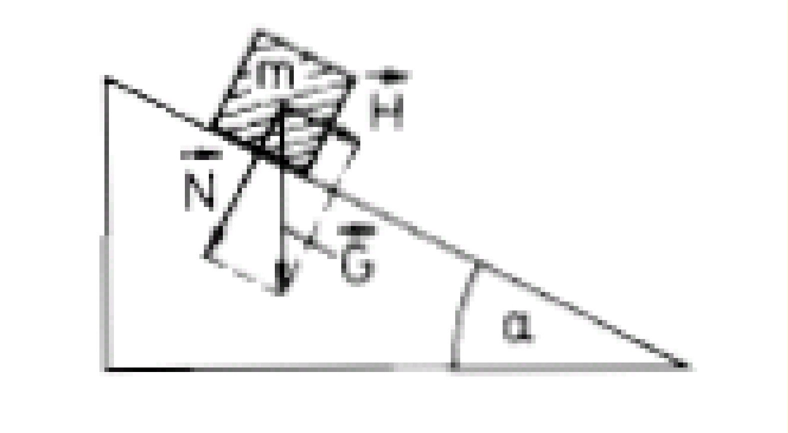
d.h. $$\upsilon(m(t)) = -w\ln\frac{m(t)}{m_0}$$

d.h. $$m(\upsilon(t)) = m_0 e^{-\upsilon(t)/w}$$

Kräfte als Vektoren

Beispiel:
Hangabtriebskraft

$$\left|\vec{H}\right| = \left|\vec{G}\right| \sin\alpha$$



Die „Normalkraft“

$$\left|\vec{H}\right| = \left|\vec{G}\right| \cos\alpha$$

wird von der Unterlage aufgefangen.

Zentripetal-, Zentrifugalkraft

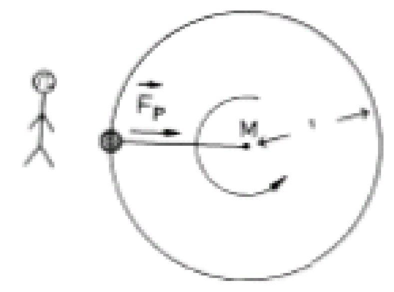


Abb. 5.12 Zentripetalkraft

Für Kreisbewegung wird
eine Beschleunigung auf
den Kreismittelpunkt hin benötigt
d.h. die Richtung ändert sich
kontinuierlich.
Für den Betrag ergibt sich $a_r = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$

Für die Zentripetalkraft ergibt sich also $F_r = m \cdot a_r = m\omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$

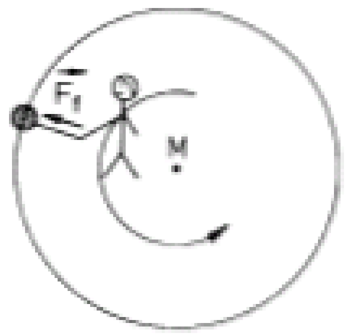
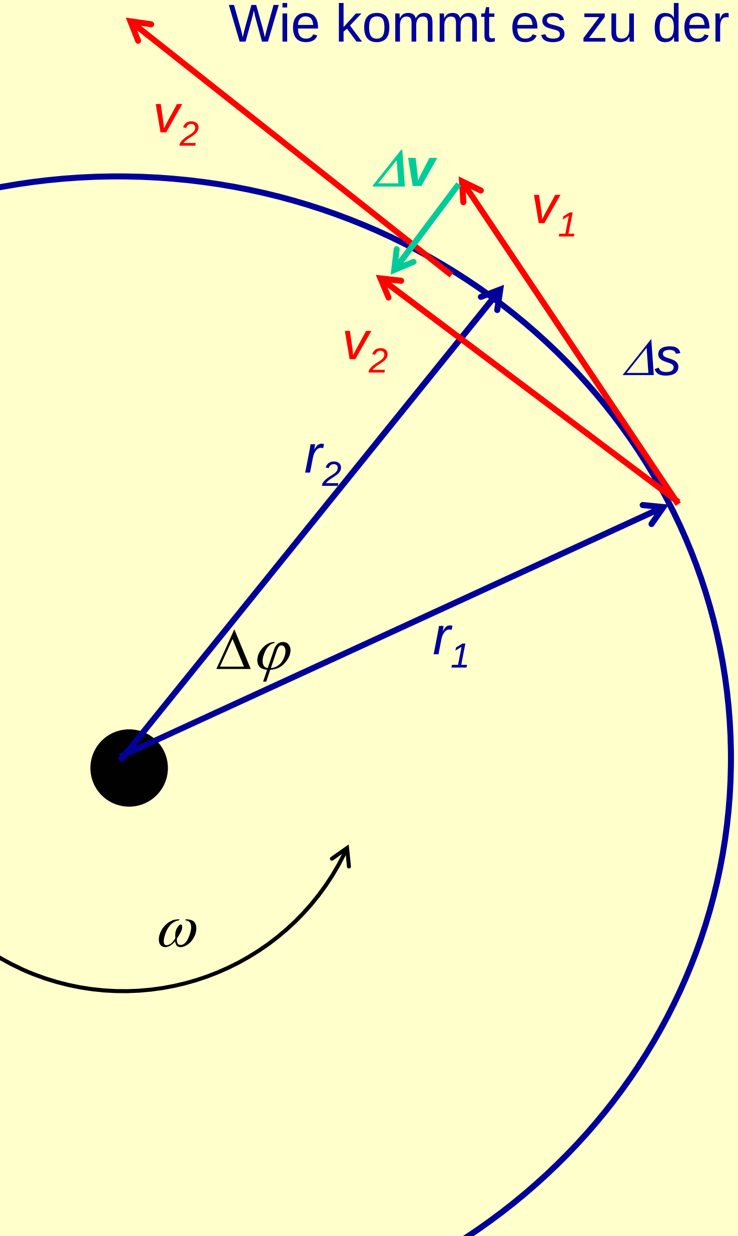


Abb. 5.13 Zentrifugalkraft

Analog spüren die bei der
Kreisbewegung mitgeführten Körper
(bzw. die Verankerungen)
eine Zentrifugalkraft, die vom
Kreismittelpunkt weg gerichtete ist.

Zentripetal-, Zentrifugalkraft 2

Wie kommt es zu der Formel?



$$\Delta s = r\,\Delta\varphi$$

$$ds = r\,d\varphi$$

$$\frac{ds}{dt} = r\,\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\upsilon = r\,\omega \quad \text{bzw.} \quad \omega = \frac{\upsilon}{r}$$

$$d\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1 \approx \upsilon \sin(d\varphi) \approx \upsilon\, d\varphi$$

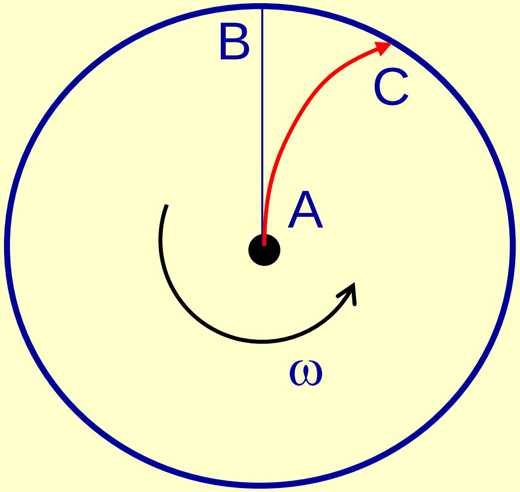
$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon\,\frac{d\varphi}{dt} = \upsilon\omega = \frac{\upsilon^2}{r}$$

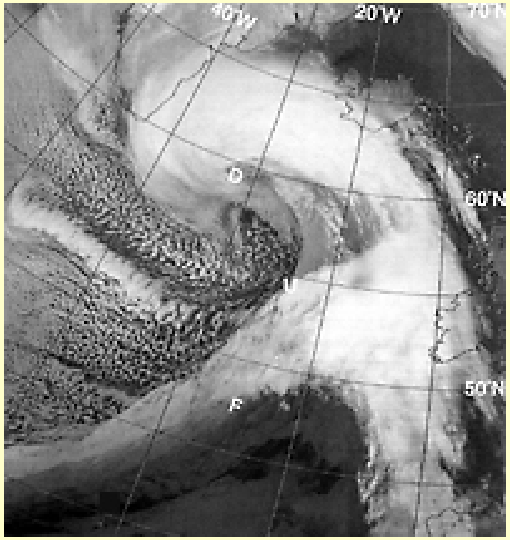
Corioliskraft

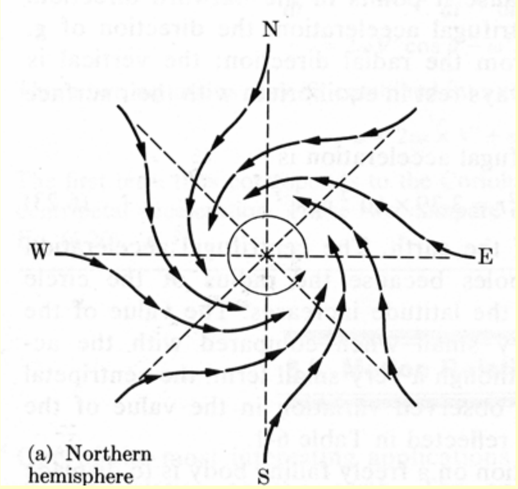
Ein mitbewegter Beobachter auf einem rotierenden Bezugssystem beobachtet zwei Trägheitskräfte:

- Zentrifugalkraft $\vec{F}_z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
- Corioliskraft $\vec{F}_C = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})$

Blick auf den Nordpol:







Auf der Nordhalbkugel: Ablenkung der Luftmassen nach rechts!

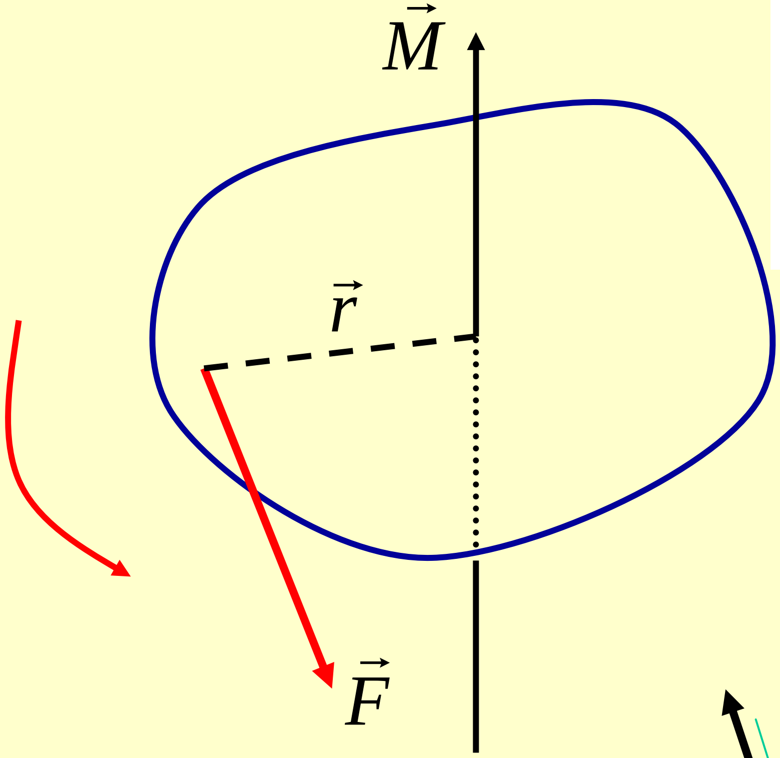
Beispiel: Linksdrehung bei Tiefdruckgebieten.

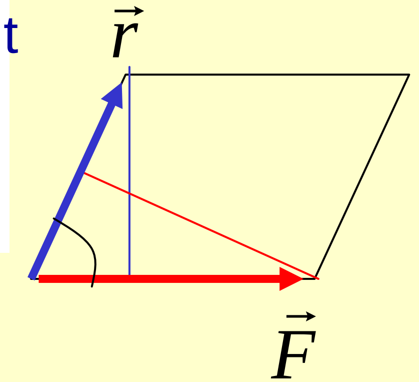
Auch: Foucaultsches Pendel

Drehmoment

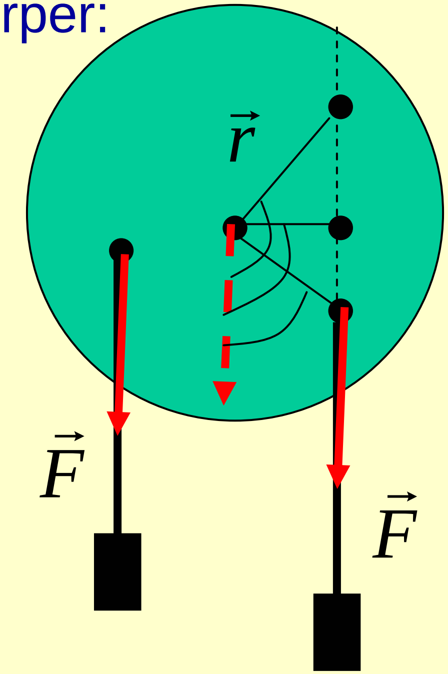
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{Drehmoment}$$

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \sin(\vec{r}, \vec{F})$$

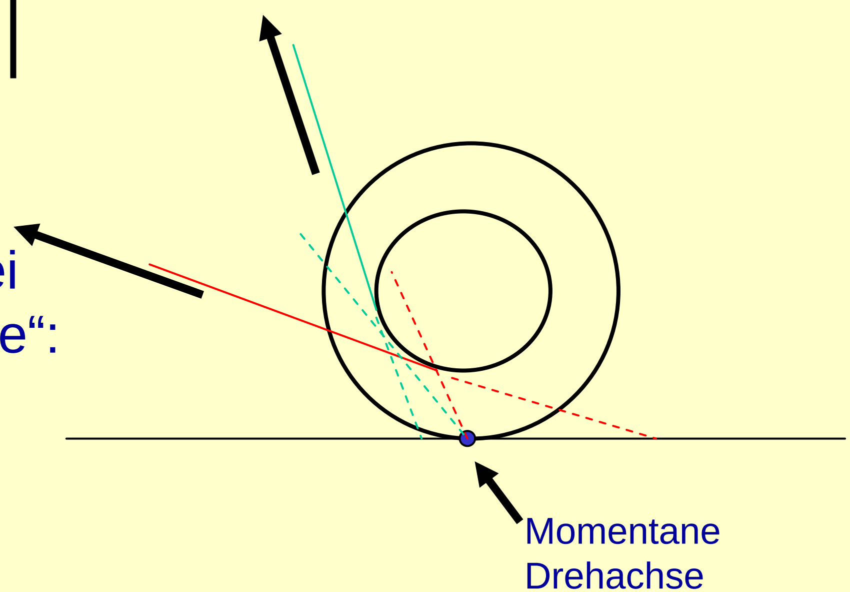




„Linienflüchtigkeit“der Kräfte am starren Körper:



Drehmoment bei „folgsamer Spule“:



Hebelgesetz

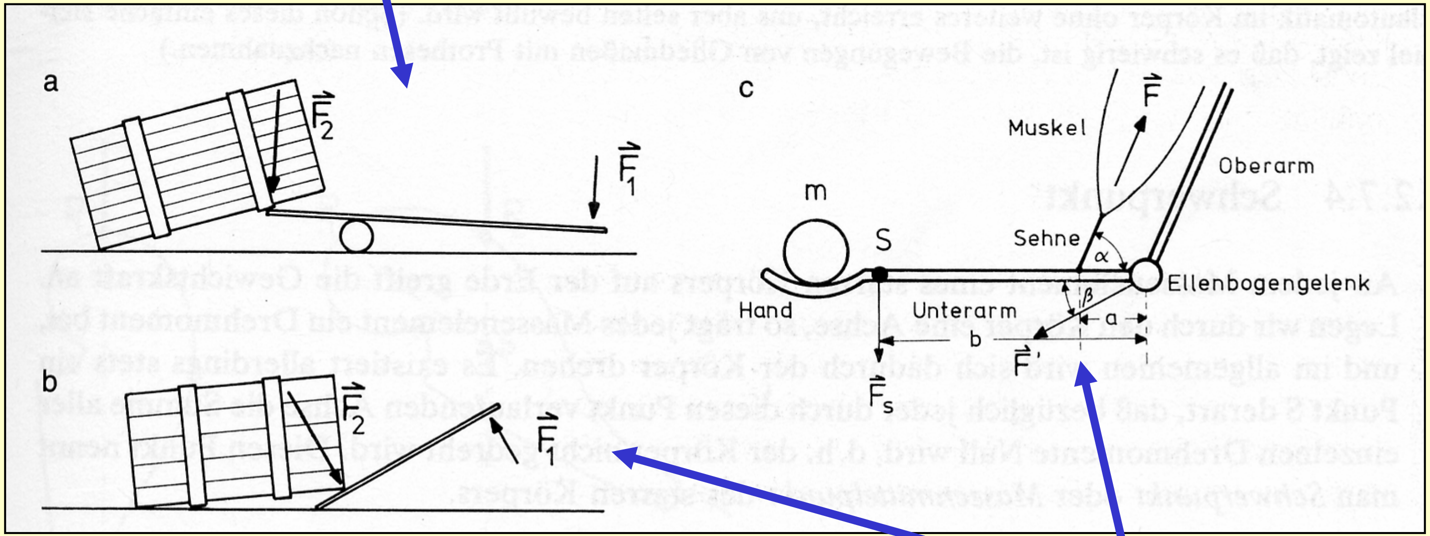
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$ Drehmoment

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \sin(\vec{r}, \vec{F})$$

Spezialfall: $\vec{r} \perp \vec{F}$

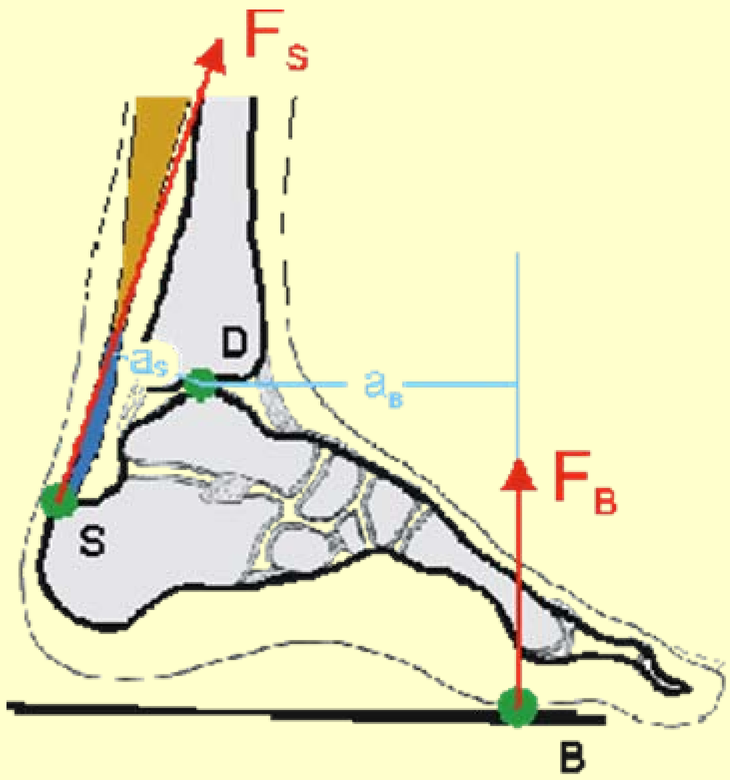
Hebelgesetz $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$

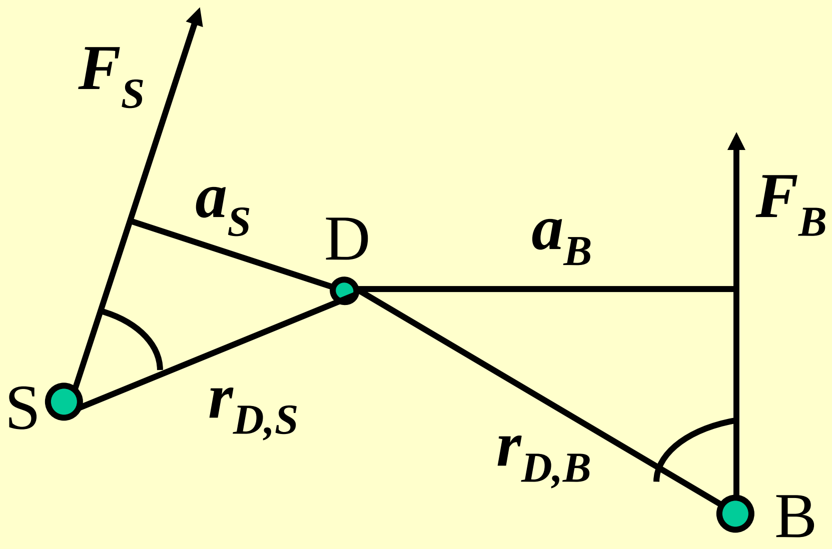
Zweiseitiger Hebel



Einseitiger Hebel

Drehmomente am Fußgelenk





$$F_S \times r_{D,S} = F_B \times r_{D,B}$$

$$F_S \cdot a_S = F_B \cdot a_B$$

Jede Bewegung eines starren Körpers kann man aus einer Translations- und Rotationsbewegung zusammensetzen

Gleichgewicht:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

und

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots = \sum_i \vec{M}_i = 0$$

An einem Hebel herrscht Gleichgewicht, wenn die Summe der rechtsdrehenden Momente gleich der der linksdrehenden Momente ist

→ Waage

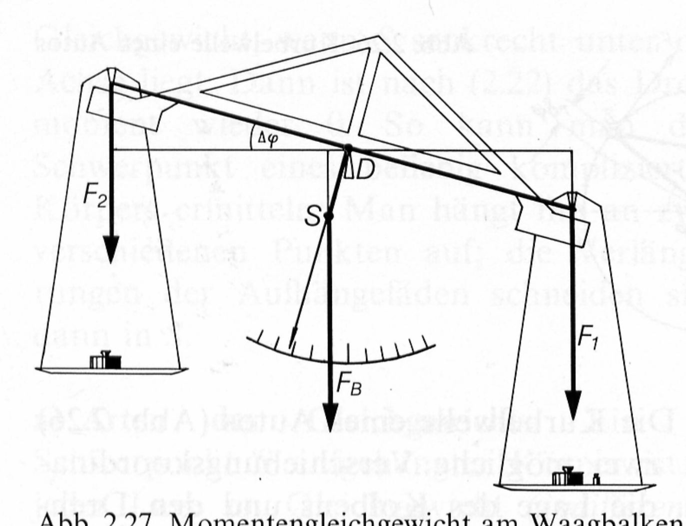
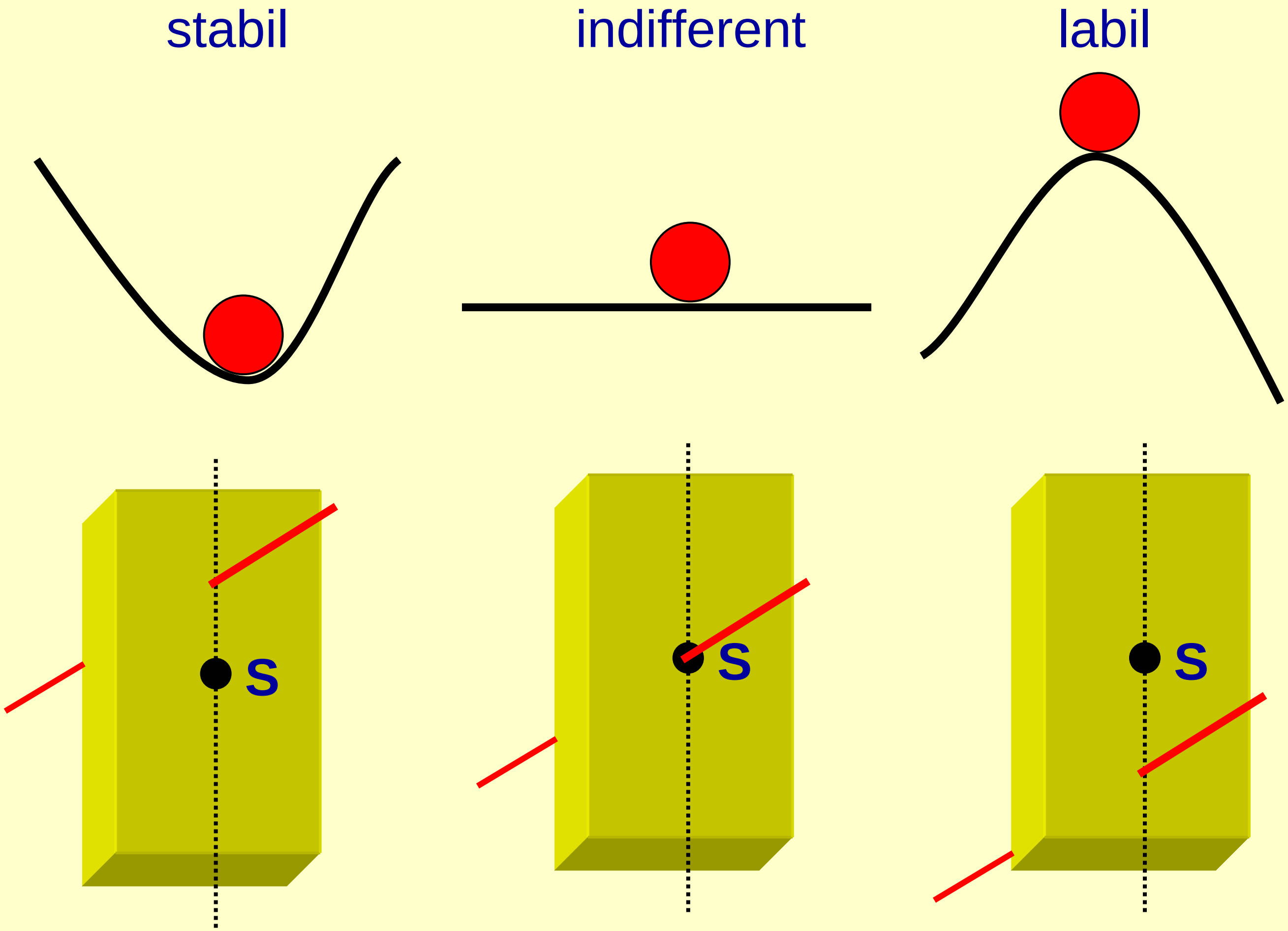


Abb. 2.27. Momentengleichgewicht am Waagbalken

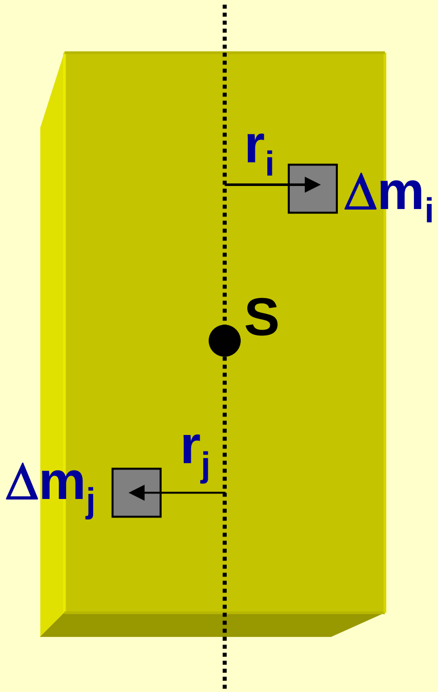


Im Gleichgewicht nimmt die potentielle Energie des Körpers einen Extremwert an, d.h. $\delta E_{pot}=0$

Schwerpunkt (Massenmittelpunkt)

Ein Körper, der in seinem Schwerpunkt unterstützt wird, bleibt in jeder Lage im Gleichgewicht.

→ Die Summe der Drehmomente aller Massenelemente um die Achse ist gleich Null.



$$\underbrace{\sum_i \Delta m_i g \vec{r}_i}_{\text{rechtsdrehend}} = \underbrace{\sum_j \Delta m_j g \vec{r}_j}_{\text{linksdrehend}}$$

Drehmomente

$$\sum_k \Delta m_k g \vec{r}_k = 0 \rightarrow \int \vec{r}\, dm = 0$$

Analogie zw. Translationen und Rotationen

Translationsbewegung | **Rotationsbewegung**

Ort $\vec{x}(t)$

Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Masse m

Kraft $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = m\vec{a}$

Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$

Winkel $\vec{\varphi}(t)$

Winkelgeschw. $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$

Winkelbeschl. $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$

Trägheitmoment

$$J = \sum_k m_k r_k^2 = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho(\vec{r}) dv$$

Drehmoment $\vec{M} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{dL}{dt}$

Drehimpuls $\vec{L} = J\vec{\omega}$

kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Impulserhaltung

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots = \sum_k \vec{p}_k = \text{const.}$$

Drehimpulserhaltung

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots = \sum_k \vec{L}_k = \text{const.}$$

Trägheitsmoment, Drehimpulserhaltung

Trägheitsmoment ist abhängig von der Massenverteilung im Hinblick auf die Drehachse

$$J = \sum_k m_k r_k^2 = \int_V r^2 dm$$

Experiment mit zwei Rollen mit gleichem Radius und gleicher Gesamtmasse!

Drehimpulserhaltung: $$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots = \sum_k \vec{L}_k = J \cdot \omega = \text{const.}$$

Experiment: Pirouette (Arme Ausbreiten auf Drehstuhl)

Satz von Steiner: $$J = J_s + m_{ges} \cdot d^2$$

Abstand der (parallelen) Achsen

Schwerpunkt

Drehmoment von außen, das sich „mitdreht“:

=> Experiment zur Präzession

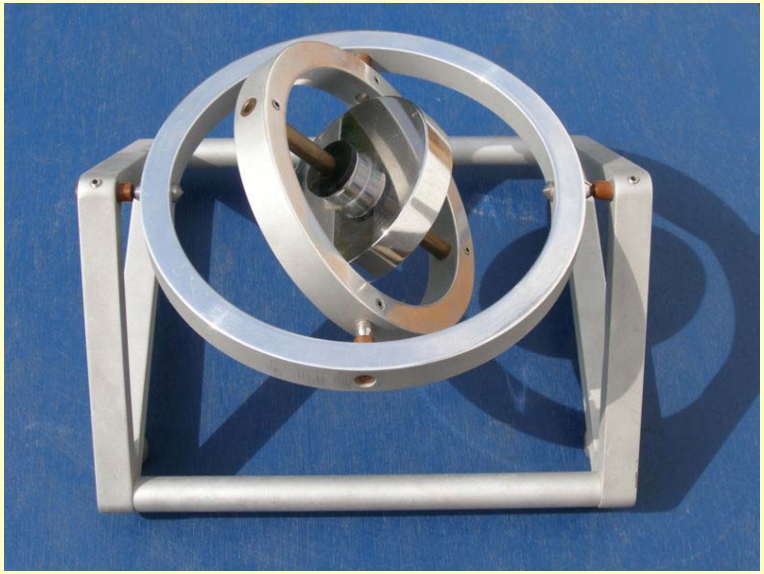
mit Fahrrad-Rad in Schlaufe

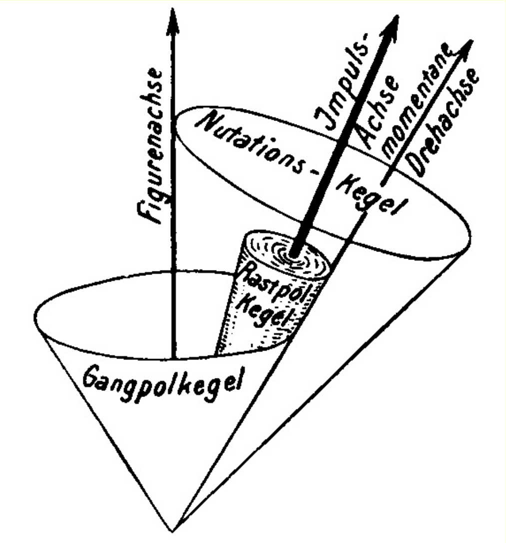
Kräftefreier Kreisel

Bei **kardanischer Aufhängung**

eines **Gyroskops** folgt

Drehimpulserhaltung



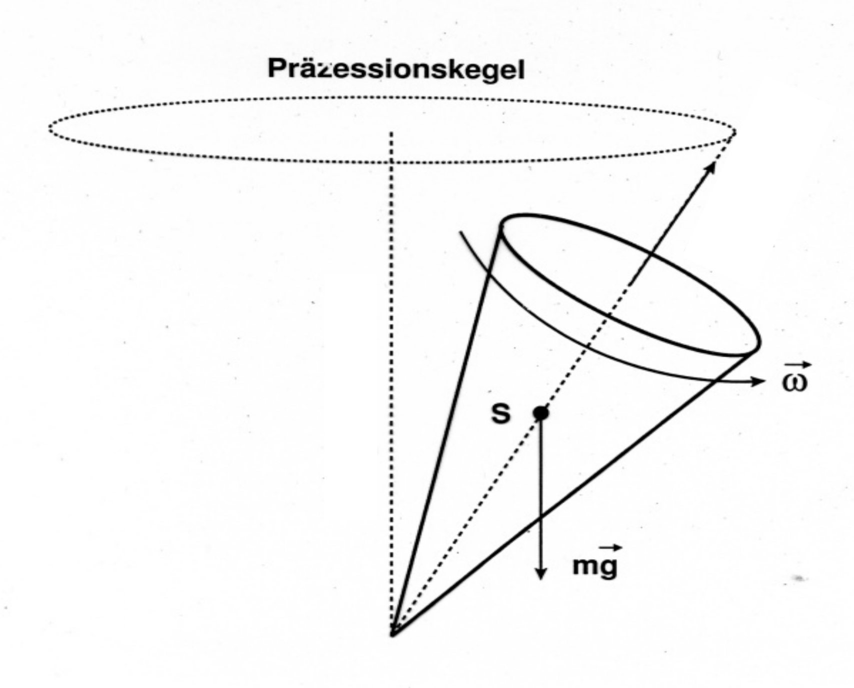


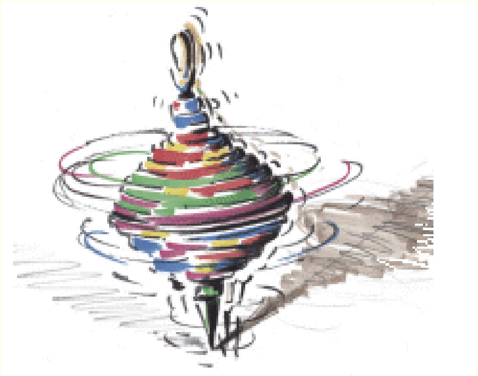
Die drei Kreiselachsen

Nutation: Bewegung der Rotationsachse des Kreisels um die Drehimpuls-Achse (wenn Drehimpuls nicht parallel zu einer Figurenachse ausgerichtet ist).

(aber Vorsicht: Nutation in Astronomie: Zusätzliche Erdpräzession aufgrund des Mondes)

Präzession





Auf einen Kreisel, der nicht
im Schwerpunkt aufgehängt ist,
wirkt ein Drehmoment senkrecht
zum momentanen Drehimpuls
und wegen M = dL/dt kommt es
zur „Drehung der Drehachse“.

z.B. bei der Erde infolge der Abplattung und
Sonnengraviation: „Platonisches Jahr“